## L'équation de Mathieu et de Mathieu modifiée
## L'équation de Hill
## L'équation de Whittaker-Hill et les fonctions d'Ince

*Les équations de Mathieu et de Mathieu modifiée sont notamment issues de la séparation des variables en coordonnées cylindriques elliptiques de l'équation de Laplace :*

$$\begin{cases} x = c\ Cosh(\eta)\, Cos(\vartheta) \\ y = c\ Sinh(\eta)\, Sin(\vartheta) \\ z \end{cases} \Rightarrow \Delta U(x,y,z) = 0$$

*Ces deux équations différentielles du second degré et dans le plan complexe z sont de la forme :*

$$y''(z) + (\lambda - 2q\ Cos(2z))\, y(z) = 0 \quad \textit{équation de Mathieu}$$

*Et :*

$$y''(z) - (\lambda - 2q\ Cosh(2z))\, y(z) = 0 \quad \textit{équation de Mathieu modifiée}$$

*L'équation de Mathieu est un cas particulier de l'équation de Hill :*

$$\begin{cases} y''(z) + (\lambda + Q(z))\, y(z) = 0 \\ ou \\ y''(z) + Q(z)\, y(z) = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \textit{équation de Hill} \\ avec \quad Q(z+\pi) = Q(z) \end{matrix}$$

*pour laquelle la fonction Q(z) est périodique de période π.*

*L'équation de Mathieu modifiée est liée à celle de Mathieu par un changement d'argument z->iz.*

*L'équation de Whittaker-Hill est également un cas particulier de l'équation de Hill pour laquelle :*

$$y''(z) + (\lambda + Q(z))\, y(z) = 0 \quad Q(z) = q\ Cos(2z) - \frac{1}{2}k^2c^2 Cos(4z)$$
$$\rightarrow y''(z) + \left(\lambda + q\ Cos(2z) - \frac{1}{2}k^2c^2 Cos(4z)\right) y(z) = 0$$

*L'équation d'Ince est étroitement liée à celle de Whittaker-Hill par un changement de paramètres et de fonction solution que l'on verra plus tard. Elle s'exprime sous la forme :*

$$y''(z) + \xi\ Sin(2z)\, y'(z) + (\eta - p\ \xi\ Cos(2z))\, y(z) = 0$$

*Dans les problèmes de physique mathématique, on s'intéresse essentiellement à la recherche de solutions périodiques de période π et 2π pour toutes ces équations. Toutefois il existe également des solutions non périodiques. Les solutions périodiques ou non périodiques sont construites à l'aide de séries, souvent sous forme de séries de Fourier en l'occurrence. Pour les fonctions de Mathieu modifiées ces séries ne convergent pas dans l'ensemble du domaine de l'argument z réel (z>1 par exemple), aussi il est possible d'utiliser d'autres séries (fonctions de Bessel) qui ont l'avantage de converger plus rapidement.*

*Dans la suite les fonctions de Mathieu d'ordre entier désigne les fonctions de Mathieu périodiques de période π ou 2π. Les fonctions de Mathieu d'ordre non-entier désignent les autres solutions de l'équation de Mathieu.*

*Pour les fonctions de Mathieu périodiques, elles sont aussi appelées les fonctions angulaires. Les fonctions radiales désignent les fonctions de Mathieu modifiées liées aux fonctions angulaires lors de la séparation des variables de l'équation de Laplace en coordonnées elliptiques cylindriques.*

*Dans la suite de ce document pour l'équation de Mathieu, nous allons caractériser ces diverses solutions, en introduisant rapidement :*
*- les formes algébriques de l'équation de Mathieu*
*- les résultats de la théorie de Floquet sur la forme des solutions de l'équation de Hill, la définition de l'exposant de Floquet avec l'application directe pour l'équation de Mathieu et*
*- les valeurs caractéristiques λ et la définition de la stabilité et de l'instabilité des solutions dans le cadre de l'équation de Hill et son application directe pour l'équation de Mathieu*
*- la construction concrète des différentes solutions sous forme de développement en série de fonctions sinusoïdales et de fonctions de Bessel.*
*- des formules diverses pour toutes les fonctions de Mathieu et Mathieu modifiées*
*- les solutions de l'équation de Mathieu algébrique par quadrature d'Hermite-Darboux*

*Dans ce même document nous développerons également sur le même schéma les solutions de l'équation de Whittaker-Hill et les polynômes trigonométriques d'Ince.*

***Transformation des équations de Mathieu sous forme algébrique***

*Commençons par les diverses formes algébriques de l'équation de Mathieu*

*La première forme algébrique est obtenue comme suit:*

$$\text{Equation de Mathieu} \quad y''(z)+(\lambda-2\,q\,Cos(2z))\,y(z)=0 \qquad \text{En posant } \zeta=Cos(z)$$

$$Cos(2z)=Cos^2(z)-Sin^2(z)=2Cos^2(z)-1=2\zeta^2-1 \Rightarrow \frac{d\zeta}{dz}=-Sin(z)=-\sqrt{1-\zeta^2} \quad \frac{d^2\zeta}{dz^2}=-Cos(z)=-\zeta$$

$$\frac{dy(z)}{dz}=\frac{d\zeta}{dz}\frac{dy(\zeta)}{d\zeta}=-\sqrt{1-\zeta^2}\,\frac{dy(z)}{d\zeta} \quad \frac{d^2y(z)}{dz^2}=\sqrt{1-\zeta^2}\,\frac{d}{d\zeta}\left(\sqrt{1-\zeta^2}\,\frac{dy(\zeta)}{d\zeta}\right)=(1-\rho^2)\frac{d^2y(\zeta)}{d\zeta^2}-\zeta\,\frac{dy(\zeta)}{d\zeta}$$

$$\Rightarrow (1-\zeta^2)\frac{d^2y(\zeta)}{d\zeta^2}-\zeta\,\frac{dy(\zeta)}{d\zeta}+(\lambda-2\,q\,(2\zeta^2-1))\,y(\zeta)=0$$

$$\Rightarrow (1-\zeta^2)\frac{d^2y(\zeta)}{d\zeta^2}-\zeta\,\frac{dy(\zeta)}{d\zeta}+(\lambda+2\,q-4\,q\,\zeta^2)\,y(\zeta)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2y(\zeta)}{d\zeta^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\zeta+1}+\frac{1}{\zeta-1}\right)\frac{dy(\zeta)}{d\zeta}+\frac{\lambda+2\,q-4\,q\,\zeta^2}{1-\zeta^2}\,y(\zeta)=0$$

*Une autre forme algébrique de l'équation de Mathieu est obtenue à l'aide du changement de variable suivant :*

$$\text{Equation de Mathieu} \quad y''(z)+(\lambda-2\,q\,Cos(2z))\,y(z)=0 \qquad \text{En posant } \zeta=Sin^2(z)$$

$$Cos(2z)=Cos^2(z)-Sin^2(z)=1-2Sin^2(z)=1-2\zeta$$

$$\Rightarrow \frac{d\zeta}{dz}=2Sin(z)Cos(z)=Sin(2z)=\sqrt{1-Cos^2(2z)}=\sqrt{1-(1-2\zeta)^2}=2\sqrt{\zeta(1-\zeta)} \quad \frac{d^2\zeta}{dz^2}=2Cos(2z)=2(1-2\zeta)$$

$$\frac{dy(z)}{dz}=\frac{d\zeta}{dz}\frac{dy(\zeta)}{d\zeta}=2\sqrt{\zeta(1-\zeta)}\,\frac{dy(\zeta)}{d\zeta} \quad \frac{d^2y(z)}{dz^2}=4\sqrt{\zeta(1-\zeta)}\,\frac{d}{d\zeta}\left(\sqrt{\zeta(1-\zeta)}\,\frac{dy(\zeta)}{d\zeta}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{d^2y(z)}{dz^2}=4\zeta(1-\zeta)\frac{d^2y(\zeta)}{d\zeta^2}+2(1-2\zeta)\frac{dy(\zeta)}{d\zeta}$$

$$\Rightarrow 4\zeta(1-\zeta)\frac{d^2y(\zeta)}{d\zeta^2}+2(1-2\zeta)\frac{dy(\zeta)}{d\zeta}+(\lambda-2q(1-2\zeta))\,y(\zeta)=0$$

$$\Rightarrow \zeta(1-\zeta)\frac{d^2y(\zeta)}{d\zeta^2}+\frac{(1-2\zeta)}{2}\frac{dy(\zeta)}{d\zeta}+\frac{1}{4}(\lambda-2q(1-2\zeta))\,y(\zeta)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2y(\zeta)}{d\zeta^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\zeta}+\frac{1}{\zeta-1}\right)\frac{dy(\zeta)}{d\zeta}+\frac{\lambda-2q+4q\zeta}{4\zeta(1-\zeta)}\,y(\zeta)=0$$

*L'équation de Mathieu modifiée sous la forme algébrique conduit à la même équation différentielle que précédemment :*

$$\text{Equation de Mathieu modifiée} \quad y''(z)-(\lambda-2q\,Cosh(2z))\,y(z)=0 \quad \text{En posant } \zeta=Cosh(z)$$

$$Cosh(2z)=Cosh^2(z)+Sinh^2(z)=2Cosh^2(z)-1=2\zeta^2-1$$

$$\Rightarrow \frac{d\zeta}{dz}=Sinh(z)=\sqrt{\zeta^2-1} \quad \frac{d^2\zeta}{dz^2}=Cosh(z)=\zeta \quad \frac{dy(z)}{dz}=\frac{dy(\zeta)}{d\zeta}\frac{d\zeta}{dz}=\sqrt{\zeta^2-1}\,\frac{dy(\zeta)}{d\zeta}$$

$$\frac{d^2y(z)}{dz^2}=\sqrt{\zeta^2-1}\,\frac{d}{d\zeta}\left(\sqrt{\zeta^2-1}\,\frac{dy(\zeta)}{d\zeta}\right)=(\zeta^2-1)\frac{d^2y(\zeta)}{d\zeta^2}+\zeta\,\frac{dy(\zeta)}{d\zeta}$$

$$y''(z)-(\lambda-2q\,Cosh(2z))\,y(z)=0$$

$$\Rightarrow (\zeta^2-1)\frac{d^2y(\zeta)}{d\zeta^2}+\zeta\,\frac{dy(\zeta)}{d\zeta}-(\lambda-2q\,(2\zeta^2-1))\,y(\zeta)=0$$

$$\Rightarrow (\zeta^2-1)\frac{d^2y(\zeta)}{d\zeta^2}+\zeta\,\frac{dy(\zeta)}{d\zeta}+(4q\,\zeta^2-2q-\lambda)\,y(\zeta)=0$$

$$\Rightarrow \frac{d^2y(\zeta)}{d\zeta^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\zeta+1}+\frac{1}{\zeta-1}\right)\frac{dy(\zeta)}{d\zeta}+\frac{4q\,\zeta^2-2q-\lambda}{\zeta^2-1}\,y(\zeta)=0$$

*En revenant à une transformation similaire à la deuxième transformation de l'équation de Mathieu :*

$$\text{Equation de Mathieu modifiée} \quad y''(z)-(\lambda-2\chi^2Cosh(2z))\,y(z)=0 \quad \text{En posant } \zeta=-Sinh^2(z)$$

$$Cosh(2z)=Cosh^2(z)+Sinh^2(z)=1+2Sinh^2(z)=1-2\zeta$$

$$\Rightarrow \frac{d\rho}{dz}=2Sinh(z)Cosh(z)=Sinh(2z)=\sqrt{Cosh^2(2z)-1}=\sqrt{(1-2\zeta)^2-1}=2\sqrt{\zeta(\zeta-1)} \quad \frac{d^2\zeta}{dz^2}=2Cosh(2z)=2(1-2\zeta)$$

$$\frac{dy(z)}{dz}=\frac{d\zeta}{dz}\frac{dy(\zeta)}{d\zeta}=2\sqrt{\zeta(\zeta-1)}\frac{dy(\zeta)}{d\zeta} \quad \frac{d^2y(z)}{dz^2}=4\sqrt{\zeta(\zeta-1)}\frac{d}{d\zeta}\left(\sqrt{\zeta(\zeta-1)}\frac{dy(\zeta)}{d\zeta}\right)\Rightarrow\frac{d^2y(z)}{dz^2}=4\zeta(\zeta-1)\frac{d^2y(\zeta)}{d\zeta^2}+2(2\zeta-1)\frac{dy(\zeta)}{d\zeta}$$

$$\Rightarrow 4\zeta(\zeta-1)\frac{d^2y(\zeta)}{d\zeta^2}+2(2\zeta-1)\frac{dy(\zeta)}{d\zeta}-(\lambda-2q\,(1-2\zeta))\,y(\zeta)=0$$

$$\Rightarrow \frac{d^2y(\zeta)}{d\zeta^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\zeta}+\frac{1}{\zeta-1}\right)\frac{dy(\zeta)}{d\zeta}-\frac{\lambda-2q+4q\zeta}{4\zeta(\zeta-1)}\,y(\zeta)=0$$

$$Si \quad \zeta=Sinh^2(z)\Rightarrow\frac{d^2y(\zeta)}{d\zeta^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\zeta}+\frac{1}{\zeta+1}\right)\frac{dy(\zeta)}{d\zeta}-\frac{\lambda-2q-4\,q\,\zeta}{4\zeta(1+\zeta)}\,y(\zeta)=0$$

*Une dernière transformation de l'équation de Mathieu modifiée :*

$$\text{Equation de Mathieu modifiée} \quad y''(z)-(\lambda-2q\,Cosh(2z))\,y(z)=0 \quad \text{En posant } \zeta=\frac{e^z}{2}\Rightarrow\frac{d^2\zeta}{dz^2}=\frac{d\zeta}{dz}=\zeta \quad Cosh(2z)=2(\zeta$$

$$\frac{dy(z)}{dz}=\frac{dy(\zeta)}{d\rho}\frac{d\zeta}{dz}=\zeta\,\frac{dy(\zeta)}{d\rho}\Rightarrow\frac{d^2y(z)}{dz^2}=\zeta\,\frac{d}{d\zeta}\frac{dy(z)}{dz}=\zeta\,\frac{d}{d\zeta}\left(\zeta\,\frac{dy(\zeta)}{d\zeta}\right)=\zeta^2\,\frac{d^2y(\zeta)}{d\zeta^2}+\zeta\,\frac{dy(\zeta)}{d\zeta}$$

$$\Rightarrow \zeta^2\,\frac{d^2y(\zeta)}{d\zeta^2}+\zeta\,\frac{dy(\zeta)}{d\zeta}+\left(4q\left(\zeta^2+\frac{1}{\zeta^2}\right)-\lambda\right)y(\zeta)=0\Rightarrow\frac{d^2y(\zeta)}{d\zeta^2}+\frac{1}{\zeta}\frac{dy(\zeta)}{d\zeta}+\frac{4q\,(\zeta^4+1)-\lambda\zeta^2}{\zeta^4}\,y(\zeta)=0$$

*Application de la théorie de Floquet à l'équation de Mathieu*

*Soit plus généralement l'équation de Hill écrite sous la forme suivante :*

$$\begin{cases} y''(z) + Q(z)\,y(z) = 0 \\ Q(z+\pi) = Q(z) \end{cases}$$

*Supposons que la fonction Q(z) est une fonction analytique (holomorphe) dans le plan complexe, alors l'équation différentielle ne possède aucune singularité et les solutions de cette équation sont également analytiques autour de tout point $z_0$ du plan complexe s'étant donné deux conditions initiales en ce point :* $y(z_0), y'(z_0)$. *La théorie nous dit qu'il existe deux solutions dîtes fondamentales indépendantes que nous écrivons :*

$$y_I(z), y_{II}(z) \quad tel\ que \quad y_I(0) = 1 \quad y_I'(0) = 0 \quad y_{II}(0) = 0 \quad y_I''(0) = 1$$

*Soit que le Wronskien de ces deux solutions est égal à 1 :* $Wronskien(y_I(0), y_{II}(0)) = 1$ *et que d'après l'équation différentielle ce wronskien est constant soit* $Wronskien(y_I(z), y_{II}(z)) = 1$.

*Le théorème de Floquet stipule qu'il existe une solution de l'équation de Hill ainsi qu'un exposant v tel que :* $y(z+\pi) = e^{i\pi\nu} y(z)$. *Cet exposant v peut être à valeur réelle ou complexe. Toute solution de l'équation de Hill peut alors être développé sous la forme d'une combinaison linéaire des solutions fondamentales indépendantes, de plus* $y(z+\pi)$ *est aussi une solution de l'équation de Hill, aussi pouvons-nous écrire :*

$$\begin{cases} y_I(z+\pi) = y_I(\pi) y_I(z) + y_I'(\pi) y_{II}(z) \\ y_{II}(z+\pi) = y_{II}(\pi) y_I(z) + y_{II}'(\pi) y_{II}(z) \\ y(z+\pi) = e^{i\pi\nu} y(z) = c_I y_I(z) + c_{II} y_{II}(z) \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} y_I(\pi) - e^{i\pi\nu} & y_I'(\pi) \\ y_{II}(\pi) & y_{II}'(\pi) - e^{i\pi\nu} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} c_I \\ c_{II} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} y_I(\pi) - e^{i\pi\nu} & y_I'(\pi) \\ y_{II}(\pi) & y_{II}'(\pi) - e^{i\pi\nu} \end{vmatrix} = 0$$

*Donc* $e^{i\pi\nu}$ *est une valeur propre de la matrice* $\begin{vmatrix} y_I(\pi) & y_I'(\pi) \\ y_{II}(\pi) & y_{II}'(\pi) \end{vmatrix}$. *L'équation pour la détermination des valeurs propres peut aussi s'écrire :*

$$\rho = e^{i\pi\nu} \rightarrow \begin{vmatrix} y_I(\pi) - \rho & y_I'(\pi) \\ y_{II}(\pi) & y_{II}'(\pi) - \rho \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \rho^2 - \rho\,(y_I(\pi) + y_{II}'(\pi)) + y_I(\pi) y_{II}'(\pi) - y_I'(\pi) y_{II}(\pi) = 0$$

*Or* $\quad y_I(\pi) y_{II}'(\pi) - y_I'(\pi) y_{II}(\pi) = Wronskien(y_I(z), y_{II}(z)) = 1 \Rightarrow \rho^2 - \rho\,(y_I(\pi) + y_{II}'(\pi)) + 1 = 0$

*Les valeurs propres s'écrivent :*

$$\Delta = (y_I(\pi) + y_{II}'(\pi))^2 - 4 = (y_I(\pi) + y_{II}'(\pi) - 2)(y_I(\pi) + y_{II}'(\pi) + 2)$$

$$\rho_{1,2} = \frac{(y_I(\pi) + y_{II}'(\pi)) \pm \sqrt{\Delta}}{2}$$

*Deux cas se distinguent, soit les valeurs propres sont simples soit elles sont multiples. Elles sont multiples lorsque :* $\Delta=(y_I(\pi)+y_{II}'(\pi)-2)(y_I(\pi)+y_{II}'(\pi)+2)=0$*. Cela arrive justement dans le cas où les solutions fondamentales* $y_I(z), y_{II}(z)$ *sont périodiques respectivement anti-périodiques de période π ou inversement :*

$$\begin{cases} y_I(z+\pi)=y_I(z) \\ y_{II}(z+\pi)=-y_{II}(z) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_I'(z+\pi)=y_I(z) \\ y_{II}''(z+\pi)=-y_{II}(z) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_I(\pi)=1 \quad y_I'(\pi)=0 \\ y_{II}(\pi)=0 \quad y_{II}'(\pi)=1 \end{cases} \Rightarrow y_I(\pi)+y_{II}'(\pi)=2 \Rightarrow \Delta=0$$

$$\begin{cases} y_I(z+\pi)=-y_I(z) \\ y_{II}(z+\pi)=y_{II}(z) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_I'(z+\pi)=-y_I(z) \\ y_{II}''(z+\pi)=y_{II}(z) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_I(\pi)=-1 \quad y_I'(\pi)=0 \\ y_{II}(\pi)=0 \quad y_{II}'(\pi)=-1 \end{cases} \Rightarrow y_I(\pi)+y_{II}'(\pi)=-2 \Rightarrow \Delta=0$$

*Dans ce cas on a évidemment :* $\begin{cases} e^{i\pi\nu}=\rho_{1,2}=\dfrac{(y_I(\pi)+y_{II}'(\pi))}{2}=\pm 1 \Rightarrow \nu=0 \quad ou \quad \nu=1 \\ y_{II}(\pi)=y_I'(\pi)=0 \end{cases}$

*<u>Le cas symétrique de l'équation de Hill :Q(z) =Q(-z)</u>*

*Supposons de plus que Q(z) est une fonction paire z. Dans ce cas la transformation z->-z laisse également invariante l'équation de Hill. Alors les deux solutions fondamentales sont respectivement paire et impaire :* $y_I(-z)=y_I(z) \quad y_{II}(-z)=-y_{II}(z)$*. Dans ce cas on peut établir également les relations suivantes sur les valeurs en π :*

$$\begin{cases} y_I(\pi)=2y_I\left(\dfrac{\pi}{2}\right)y_{II}'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)-1=1+2y_I'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)y_{II}\left(\dfrac{\pi}{2}\right) \\ y_{II}(\pi)=2y_{II}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)y_{II}'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) \\ y_I'(\pi)=2y_I\left(\dfrac{\pi}{2}\right)y_I'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) \\ y_{II}'(\pi)=y_I(\pi) \end{cases}$$

*De même* $\begin{cases} y_I(z\pm\pi)=y_I(\pi)y_I(z)\pm y_I'(\pi)y_{II}(z) \\ y_{II}(z\pm\pi)=\pm y_{II}(\pi)y_I(z)+y_{II}'(\pi)y_{II}(z) \end{cases}$*. De plus il existe une des solutions fondamentales, non triviale et périodique respectant les 4 alternatives suivantes :*

$$\begin{cases} (1) \quad y_I(z) \quad \text{paire et de période } \pi \quad si \quad y_I'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0 \\ (2) \quad y_{II}(z) \quad \text{impaire et de période } \pi \quad si \quad y_{II}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0 \\ (3) \quad y_I(z) \quad \text{paire et de période } 2\pi \quad anti-\text{période } \pi \quad si \quad y_I\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0 \\ (4) \quad y_{II}(z) \quad \text{impaire et de période } 2\pi \quad anti-\text{période } \pi \quad si \quad y_{II}'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0 \end{cases}$$

*Dans ce cas on classe les solutions fondamentales périodiques en fonction de la valeur de l'exposant de Floquet comme suit :*

$$\begin{cases} \nu = 0 \quad y_I(z) \quad \textit{paire et de période } \pi \quad y_I'(0) = y_I'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \\ \nu = 1 \quad y_I(z) \quad \textit{paire et de période } 2\pi \quad \textit{anti-période } \pi \quad y_I'(0) = y_{II}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \\ \nu = 1 \quad y_{II}(z) \quad \textit{impaire et de période } \pi \quad y_I(0) = y_{II}'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \\ \nu = 0 \quad y_{II}(z) \quad \textit{impaire et de période } 2\pi \quad \textit{anti-période } \pi \quad y_{II}(0) = y_{II}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

*<u>Valeurs caractéristiques de l'équation de Hill et intervalles de stabilité</u>*

*On reformule l'équation de Hill en introduisant la valeur caractéristique λ:*

$$y''(z) + (\lambda + Q(z))\, y(z) = 0$$

*Alors la théorie de l'équation de Hill établit le théorème d'oscillation suivant : pour toute équation de Hill il existe deux séquences infinis de valeurs caractéristiques monotones croissantes :*

$$\begin{cases} \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots \\ \lambda_1', \lambda_2', \ldots, \lambda_n', \ldots \end{cases}$$

*La première séquence* $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ *correspond à une solution de période π, la seconde séquence* $\lambda_1', \lambda_2', \ldots, \lambda_n', \ldots$ *correspond avec une solution de période 2 π et anti-périodique π. Les valeurs des deux séquences s'intercalent comme suit :* $\lambda_0 < \lambda_1' \le \lambda_2' < \lambda_1 \le \lambda_2 < \lambda_3' \le \lambda_4' < \lambda_3 \le \lambda_4 < \ldots$. *De plus les limites des deux séquences sont telles que* $\lim_{n\to\infty} \lambda_n^{-1} = 0 \quad \lim_{n\to\infty} \lambda_n'^{-1} = 0$. *D'autre part les solutions sont stables lorsque les valeurs caractéristiques sont dans les intervalles suivants :* $(\lambda_0, \lambda_1')\ (\lambda_2' < \lambda_1)\ (\lambda_2, \lambda_3')\ (\lambda_4', \lambda_3)\ \ldots$. *Les valeurs caractéristiques* $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ *correspondent aux valeurs* $y_I(\pi) + y_{II}'(\pi) = 2$ *et les valeurs caractéristiques* $\lambda_1', \lambda_2', \ldots, \lambda_n', \ldots$ *aux valeurs* $y_I(\pi) + y_{II}'(\pi) = -2$.

*Test de stabilité des solutions de l'équation de Hill*

*Par définition on dit que les solutions de l'équation de Hill sont stables si elles sont bornées pour la valeur absolu de z tendant vers l'infini. Comme on a* $y(z+\pi)=e^{i\pi\nu}y(z)$ *alors* $y(z+n\pi)=\rho^n y(z)=e^{in\pi\nu}y(z)$. *La condition de stabilité est donc assurée si* $|\rho|\leq 1$ *soit* $\left|\frac{(y_I(\pi)+y_{II}'(\pi))\pm\sqrt{\Delta}}{2}\right|\leq 1$. *Cette condition est remplie si :*

$$|y_I(\pi)+y_{II}'(\pi)|<2$$

*ou bien lorsque*

$$y_I(\pi)+y_{II}'(\pi)=\pm 2 \quad et \quad y_I'(\pi)=y_{II}(\pi)=0$$

*Le deuxième cas correspond à celui où* $\nu=0 \quad ou \quad \nu=1$ *soit dans le cas où les deux solutions indépendantes sont respectivement périodique et anti-périodique de période π.*

*Tous les points abordés précédemment sont relativement théorique mais lorsque l'on construit concrètement le développement des solutions en série (par exemple de Fourier), tout ces résultats prennent tout leur sens.*

*Construction concrète des solutions périodiques de l'équation de Hill*

*Selon le théorème de Floquet la solution respecte la relation suivante* $y(z+\pi)=e^{i\pi\nu}y(z)$ *pour l'équation de Hill de la forme :* $y''(z)+(\lambda+Q(z))\,y(z)=0$. *Avec les contraintes sur la fonction Q(z) : Q(z) =Q(-z) et Q(z+π) =Q(z) prenons cette dernière sous la forme de sa série de Fourier :*

$$Q(z)=2q_1Cos(2z)+2q_2Cos(4z)+2q_3Cos(6z)+...=2\times\sum_{l=1}^{l=\infty}q_lCos(2lz)$$

*En tant que série de Fourier la série suivante converge absolument :* $\sum_{l=1}^{l=\infty}q_l$ *. Prenons pour la solution recherche le développement suivant :* $y(z)=e^{i\nu z}\sum_{l=-\infty}^{l=+\infty}b_le^{2ilz}$ *et en considérant* $Q(z)=2\times\sum_{l=-\infty}^{l=\infty}q_nCos(2nz) \quad q_{-n}=q_n \quad q_0=\frac{\lambda}{2}$ *, alors l'équation de Hill prend la forme :*

$$\sum_{l=-\infty}^{l=+\infty}(i\nu+2il)^2\,b_le^{i(\nu+2l)z}+\left(\sum_{l=-\infty}^{l=+\infty}q_le^{2ilz}\right)\times\left(\sum_{l=-\infty}^{l=+\infty}b_le^{i(\nu+2l)z}\right)=0$$

*En égalisant les termes exponentiels :* $e^{i2lz}$ *à 0, on obtient un système infini d'équations linéaires sur les coefficients du développement de la forme :*

$$-(\nu+2l)^2 b_l + \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} b_{l-m} q_m = 0 \Leftrightarrow (\nu+2l)^2 b_l - \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} b_{l-m} q_m = 0 \qquad l = -\infty,....,0,....,+\infty$$

$$\Delta_0(\nu) = Det\begin{bmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \frac{(\nu-4)^2-\lambda}{4^2-\lambda} & -\frac{b_1}{4^2-\lambda} & -\frac{b_2}{4^2-\lambda} & -\frac{b_3}{4^2-\lambda} & -\frac{b_4}{4^2-\lambda} & \cdots \\ \cdots & -\frac{b_1}{2^2-\lambda} & \frac{(\nu-2)^2-\lambda}{2^2-\lambda} & -\frac{b_1}{2^2-\lambda} & -\frac{b_2}{2^2-\lambda} & -\frac{b_2}{2^2-\lambda} & \cdots \\ \cdots & -\frac{b_2}{0^2-\lambda} & -\frac{b_1}{0^2-\lambda} & \frac{\nu^2-\lambda}{0^2-\lambda} & -\frac{b_1}{0^2-\lambda} & -\frac{b_2}{0^2-\lambda} & \cdots \\ \cdots & -\frac{b_3}{2^2-\lambda} & -\frac{b_2}{2^2-\lambda} & -\frac{b_1}{2^2-\lambda} & \frac{(\nu+2)^2-\lambda}{2^2-\lambda} & -\frac{b_1}{2^2-\lambda} & \cdots \\ \cdots & -\frac{b_4}{4^2-\lambda} & -\frac{b_3}{4^2-\lambda} & -\frac{b_2}{4^2-\lambda} & -\frac{b_1}{4^2-\lambda} & \frac{(\nu+4)^2-\lambda}{4^2-\lambda} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

$$\Delta_1(\nu) = Det\begin{bmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & 1 & -\frac{b_1}{(\nu-4)^2-\lambda} & -\frac{b_2}{(\nu-4)^2-\lambda} & -\frac{b_3}{(\nu-4)^2-\lambda} & -\frac{b_4}{(\nu-4)^2-\lambda} & \cdots \\ \cdots & -\frac{b_1}{(\nu-2)^2-\lambda} & 1 & -\frac{b_1}{(\nu-2)^2-\lambda} & -\frac{b_2}{(\nu-2)^2-\lambda} & -\frac{b_2}{(\nu-2)^2-\lambda} & \cdots \\ \cdots & -\frac{b_2}{\nu^2-\lambda} & -\frac{b_1}{\nu^2-\lambda} & 1 & -\frac{b_1}{\nu^2-\lambda} & -\frac{b_2}{\nu^2-\lambda} & \cdots \\ \cdots & -\frac{b_3}{(\nu+2)^2-\lambda} & -\frac{b_2}{(\nu+2)^2-\lambda} & -\frac{b_1}{(\nu+2)^2-\lambda} & 1 & -\frac{b_1}{(\nu+2)^2-\lambda} & \cdots \\ \cdots & -\frac{b_4}{(\nu+4)^2-\lambda} & -\frac{b_3}{(\nu+4)^2-\lambda} & -\frac{b_2}{(\nu+4)^2-\lambda} & -\frac{b_1}{(\nu+4)^2-\lambda} & 1 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

*On peut montrer que les deux déterminants sont liés par la relation :*

$$\Delta_0(\nu) = \Delta_1(\nu) \times \underset{n\to\infty}{Lim} \prod_{l=-n}^{l=+n} \left\{ \frac{\lambda-(\nu+2l)}{\lambda-4l^2} \right\} = \Delta_1(\nu) \frac{Sin\left(\frac{\pi}{2}\left(\sqrt{\lambda}+\nu\right)\right) Sin\left(\frac{\pi}{2}\left(\sqrt{\lambda}-\nu\right)\right)}{Sin^2\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda}\right)}$$

*On peut montrer que le déterminant* $\Delta_1(\nu)$ *s'exprime sous une forme très simple à l'aide d'une constante K à déterminer :*

$$\Delta_1(\nu) = 1 + K \times \left( Cotan\left(\frac{\pi}{2}\left(\sqrt{\lambda} - \nu\right)\right) + Cotan\left(\frac{\pi}{2}\left(\sqrt{\lambda} + \nu\right)\right)\right)$$

*Donc :*

$$\Delta_0(\nu) = \frac{Sin\left(\frac{\pi}{2}\left(\sqrt{\lambda}+\nu\right)\right)Sin\left(\frac{\pi}{2}\left(\sqrt{\lambda}-\nu\right)\right)}{Sin^2\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda}\right)} + K \times \frac{Sin\left(\frac{\pi}{2}\left(\sqrt{\lambda}+\nu\right)\right)Sin\left(\frac{\pi}{2}\left(\sqrt{\lambda}-\nu\right)\right)}{Sin^2\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda}\right)}\left( Cotan\left(\frac{\pi}{2}\left(\sqrt{\lambda} - \nu\right)\right) + Cotan\left(\frac{\pi}{2}\left(\sqrt{\lambda} + \nu\right)\right)\right)$$

$$\Rightarrow \Delta_0(\nu) = \frac{Sin\left(\frac{\pi}{2}\left(\sqrt{\lambda}+\nu\right)\right)Sin\left(\frac{\pi}{2}\left(\sqrt{\lambda}-\nu\right)\right)}{Sin^2\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda}\right)} + 2K \times \frac{Cos\left(\frac{\pi}{2}\left(\sqrt{\lambda}\right)\right)}{Sin\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda}\right)} = \frac{Sin\left(\frac{\pi}{2}\left(\sqrt{\lambda}+\nu\right)\right)Sin\left(\frac{\pi}{2}\left(\sqrt{\lambda}-\nu\right)\right)}{Sin^2\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda}\right)} + 2K \times Cotan\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda}\right)$$

*Cette constante K se détermine « facilement » lorsque* $Sin\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda}\right) \neq 0$ *en posant v=0. Dans ce cas, il vient :* $\Delta_0(0) = 1 + 2K \times Cotan\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda}\right) \Rightarrow K = \frac{\Delta_0(0)-1}{2} \times Tan\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda}\right)$*. En injectant cette valeur dans l'expression de* $\Delta_0(\nu)$ *on obtient :*

$$\Delta_0(\nu) = \Delta_0(0) - 1 + \frac{Sin\left(\frac{\pi}{2}\left(\sqrt{\lambda}+\nu\right)\right)Sin\left(\frac{\pi}{2}\left(\sqrt{\lambda}-\nu\right)\right)}{Sin^2\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda}\right)} = \Delta_0(0) + \frac{Sin\left(\frac{\pi}{2}\left(\sqrt{\lambda}+\nu\right)\right)Sin\left(\frac{\pi}{2}\left(\sqrt{\lambda}-\nu\right)\right) - Sin^2\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda}\right)}{Sin^2\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda}\right)}$$

$$Or \quad Sin\left(\frac{\pi}{2}\left(\sqrt{\lambda}+\nu\right)\right)Sin\left(\frac{\pi}{2}\left(\sqrt{\lambda}-\nu\right)\right) = Sin^2\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda}\right)Cos^2\left(\frac{\pi}{2}\nu\right) - Cos^2\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda}\right)Sin^2\left(\frac{\pi}{2}\nu\right)$$

$$\Rightarrow \Delta_0(0) - \frac{Sin^2\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda}\right)Sin^2\left(\frac{\pi}{2}\nu\right) + Cos^2\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda}\right)Sin^2\left(\frac{\pi}{2}\nu\right)}{Sin^2\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda}\right)} \Rightarrow \Delta_0(\nu) = \Delta_0(0) - \frac{Sin^2\left(\frac{\pi}{2}\nu\right)}{Sin^2\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda}\right)}$$

*Exprimons une relation similaire qui relie* $\Delta_1(\nu)$ *et* $\Delta_1(0)$*. Tout d'abord remarquons simplement que :* $\Delta_0(0) = \Delta_1(0)$*. Ensuite Partant de l'expression :*

$$\Delta_1(\nu) = \Delta_0(\nu) \times \frac{Sin^2\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda}\right)}{Sin\left(\frac{\pi}{2}\left(\sqrt{\lambda}+\nu\right)\right)Sin\left(\frac{\pi}{2}\left(\sqrt{\lambda}-\nu\right)\right)}$$

*Il vient :*

$$\Delta_0(\nu)=\Delta_0(0)-\frac{Sin^2\left(\frac{\pi}{2}\nu\right)}{Sin^2\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda}\right)} \Leftrightarrow \Delta_1(\nu)=\Delta_0(0)\times\frac{Sin^2\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda}\right)}{Sin\left(\frac{\pi}{2}\left(\sqrt{\lambda}+\nu\right)\right)Sin\left(\frac{\pi}{2}\left(\sqrt{\lambda}-\nu\right)\right)}-\frac{Sin^2\left(\frac{\pi}{2}\nu\right)}{Sin\left(\frac{\pi}{2}\left(\sqrt{\lambda}+\nu\right)\right)Sin\left(\frac{\pi}{2}\left(\sqrt{\lambda}-\nu\right)\right)}$$

$$\Rightarrow \Delta_1(\nu)=\frac{\Delta_1(0)\times Sin^2\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda}\right)-Sin^2\left(\frac{\pi}{2}\nu\right)}{Sin\left(\frac{\pi}{2}\left(\sqrt{\lambda}+\nu\right)\right)Sin\left(\frac{\pi}{2}\left(\sqrt{\lambda}-\nu\right)\right)}$$

*Lorsque* $Sin\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda}\right)=0$*, il faut utiliser directement le déterminant* $\Delta_1(\nu)$*. Alors la constante K se détermine tout aussi simplement par la valeur* $\Delta_1(1)$*, à savoir :*

$$K=\frac{\Delta_1(1)-1}{Cotan\left(\frac{\pi}{2}\left(\sqrt{\lambda}-\nu\right)\right)+Cotan\left(\frac{\pi}{2}\left(\sqrt{\lambda}+\nu\right)\right)}$$

$$Or \quad \left(Cotan\left(\frac{\pi}{2}\left(\sqrt{\lambda}-\nu\right)\right)+Cotan\left(\frac{\pi}{2}\left(\sqrt{\lambda}+\nu\right)\right)\right)^{-1}=\frac{Sin\left(\frac{\pi}{2}\left(\sqrt{\lambda}+\nu\right)\right)Sin\left(\frac{\pi}{2}\left(\sqrt{\lambda}-\nu\right)\right)}{2Cos\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda}\right)Sin\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda}\right)}$$

$$\Rightarrow\left(Cotan\left(\frac{\pi}{2}\left(\sqrt{\lambda}-1\right)\right)+Cotan\left(\frac{\pi}{2}\left(\sqrt{\lambda}+1\right)\right)\right)^{-1}=-\frac{Cos\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda}\right)}{2Sin\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda}\right)}\Rightarrow K=\frac{1-\Delta_1(1)}{2}\times\frac{Cos\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda}\right)}{Sin\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda}\right)}$$

*Dans ces conditions on peut écrire le déterminant sous la forme :*

$$\Delta_1(\nu)=1+\frac{1-\Delta_1(1)}{2}\times\frac{Cos\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda}\right)}{Sin\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda}\right)}\times\left(Cotan\left(\frac{\pi}{2}\left(\sqrt{\lambda}-\nu\right)\right)+Cotan\left(\frac{\pi}{2}\left(\sqrt{\lambda}+\nu\right)\right)\right)$$

$$\Rightarrow\Delta_1(\nu)=1+\left(1-\Delta_1(1)\right)\times\frac{Cos^2\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda}\right)}{Sin\left(\frac{\pi}{2}\left(\sqrt{\lambda}+\nu\right)\right)Sin\left(\frac{\pi}{2}\left(\sqrt{\lambda}-\nu\right)\right)}=\frac{Sin\left(\frac{\pi}{2}\left(\sqrt{\lambda}+\nu\right)\right)Sin\left(\frac{\pi}{2}\left(\sqrt{\lambda}-\nu\right)\right)+Cos^2\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda}\right)-\Delta_1(1)\times Cos^2\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda}\right)}{Sin\left(\frac{\pi}{2}\left(\sqrt{\lambda}+\nu\right)\right)Sin\left(\frac{\pi}{2}\left(\sqrt{\lambda}-\nu\right)\right)}$$

$$\Rightarrow\Delta_1(\nu)=\frac{Cos^2\left(\frac{\pi}{2}\nu\right)-\Delta_1(1)\times Cos^2\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda}\right)}{Sin\left(\frac{\pi}{2}\left(\sqrt{\lambda}+\nu\right)\right)Sin\left(\frac{\pi}{2}\left(\sqrt{\lambda}-\nu\right)\right)}$$

*En fonction du déterminant* $\Delta_0(\nu)$*, l'expression s'écrit :*

$$\Delta_1(\nu)=\Delta_0(\nu)\times\frac{Sin^2\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda}\right)}{Sin\left(\frac{\pi}{2}\left(\sqrt{\lambda}+\nu\right)\right)Sin\left(\frac{\pi}{2}\left(\sqrt{\lambda}-\nu\right)\right)}\Rightarrow\Delta_1(1)=-\Delta_0(1)\times Tan^2\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda}\right)\Rightarrow\Delta_0(\nu)=\Delta_0(1)+\frac{Cos^2\left(\frac{\pi}{2}\nu\right)}{Sin^2\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda}\right)}$$

*L'annulation du déterminant* $\Delta_1(\nu)=0$ *conduit donc à une équation transcendantale qui est relativement simple puisque qu'elle s'exprime comme suit :*

$$\begin{cases}\nu=\dfrac{2}{\pi}ArcSin\left(\sqrt{\Delta_1(0)\times Sin^2\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda}\right)}\right) & si \quad \lambda^2\neq 2l \quad l\in\mathbf{N}\\ \nu=\dfrac{2}{\pi}ArcCos\left(\sqrt{\Delta_1(1)}\right)=\dfrac{1}{\pi}ArcCos\left(2\Delta_1(1)-1\right) & si \quad \lambda^2=2l \quad l\in\mathbf{N}\end{cases}$$

*Dans leur publication de 2009 les auteurs R.Coisson et G.Vernizzi « Mathieu Functions and Numerical Solutions of the Mathieu Equation » utilise cette formule en l'appliquant au cas de l'équation de Mathieu pour déterminer l'exposant de Floquet (voir plus loin dans ce document).*

*L'annulation du déterminant* $\Delta_0(\nu)=0$ *conduit également à une équation transcendantale relativement simple :*

$$\Delta_0(0)=\frac{Sin^2\left(\frac{\pi}{2}\nu\right)}{Sin^2\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda}\right)}\Leftrightarrow\nu=\frac{2}{\pi}ArcSin\left(\sqrt{\Delta_1(0)\times Sin^2\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda}\right)}\right)\quad si \quad \lambda^2\neq 2l \quad l\in\mathbf{N}$$

*En revanche pour le cas* $\lambda^2=2l \quad l\in\mathbf{N}$ *la relation* $\Delta_0(\nu)=\Delta_0(1)+\frac{Cos^2\left(\frac{\pi}{2}\nu\right)}{Sin^2\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda}\right)}=0$ *ne peut s'appliquer puisque le dénominateur* $Sin^2\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda}\right)$ *s'annule.*

*Remarque : Numériquement c'est le déterminant* $\Delta_1(\nu)$ *qui est en général à privilégier. Notamment en le testant numériquement ainsi que* $\Delta_0(\nu)$*, c'est en général le déterminant* $\Delta_1(\nu)$ *qui converge plus vite que* $\Delta_0(\nu)$*.*

***Formulaires des fonctions de Mathieu et fonctions modifiées de Mathieu de première et deuxième espèces d'ordre entier***

*Ce petit formulaire, probablement incomplet et pas forcément très clair, n'évite pas l'étude de la théorie des fonctions de Mathieu dans les ouvrages de référence. Cette étude est inévitable avant d'envisager de calculer une quelconque solution d'un problème aux limites impliquant ces fonctions. Au passage c'est exactement la même situation* pour les fonctions sphéroïdales *qui sont un peu de proches cousines.*

*Pour les deux fonctions de Mathieu et Mathieu modifiées, il est important de représenter ces fonctions comme décomposition de fonctions sinusoïdales et hyperboliques. Dans le cas de la fonction de Mathieu de première espèce, il s'agit effectivement de sa décomposition de Fourier et la correspondance dans la fonction radiale découle de la transformation de l'argument en son imaginaire:*

$$ce_{2n}(z,q)=\sum_{l=0}^{l=\infty}A_{2l}^{(2n)}Cos(2l\,z)\Rightarrow Je_{2n}(\eta,q)=ce_{2n}(iz,q)=\sum_{l=0}^{l=\infty}A_{2l}^{(2n)}Cosh(2l\,z)$$

$$ce_{2n+1}(z,q)=\sum_{l=0}^{l=\infty}A_{2l+1}^{(2n+1)}Cos((2l+1)z)\Rightarrow Je_{2n+1}(z,q)=ce_{2n+1}(iz,q)=\sum_{l=0}^{l=\infty}A_{2l+1}^{(2n+1)}Cosh((2l+1)z)$$

$$se_{2n+1}(z,q)=\sum_{l=0}^{l=\infty}B_{2l+1}^{(2n+1)}Sin((2l+1)z)\Rightarrow Jo_{2n+1}(z,q)=-ise_{2n+1}(iz,q)=\sum_{l=0}^{l=\infty}B_{2l+1}^{(2n+1)}Sinh((2l+1)z)$$

$$se_{2n+2}(z,q)=\sum_{l=0}^{l=\infty}B_{2l+2}^{(2n+2)}Sin((2l+2)z)\Rightarrow Jo_{2n+2}(z,q)=-ise_{2n+2}(iz,q)=\sum_{l=0}^{l=\infty}B_{2l+2}^{(2n+2)}Sinh((2l+2)z)$$

*Ce n'est pas facile de calculer ces coefficients, mais il existe des algorithmes pour estimer ces valeurs. Ces coefficients sont particulièrement important car ils servent justement à l'expression des intégrales définies sur l'intervalle des valeurs des coordonnées elliptiques.*

***<u>Méthode de calcul des coefficients des fonctions de Mathieu angulaires d'ordre entier</u>***

*Une des méthodes utilisées pour calculer les coefficients de Fourier des fonctions de Mathieu angulaire consiste à diagonaliser une matrice NxN où N est l'approximation choisi pour le nombre de termes du développement de Fourier. Cette méthode consiste à mettre en équation linéaire les relations de récurrence entre les coefficients du développement de Fourier : on notera pour simplifier les coefficients de cette manière :*

$$A_{2l}^{(2n)} \rightarrow A_{2l} \quad A_{2l+1}^{(2n+1)} \rightarrow A_{2l+1} \quad B_{2l+1}^{(2n+1)} \rightarrow B_{2l+1} \quad B_{2l+2}^{(2n+2)} \rightarrow B_{2l+2}$$

$$\textit{Caractéristiques} \quad \textit{fonctions paires } a_{2n}, a_{2n+1} \rightarrow a \qquad \textit{fonctions impaires } b_{2n}, b_{2n+1} \rightarrow b$$

$$\textit{Coefficients} \quad A_{2l}, \quad a_{2n} \rightarrow a \Rightarrow \begin{cases} aA_0 - qA_2 = 0 \\ (a-4)A_2 - q(2A_0 + A_4) = 0 \\ \left(a-(2j)^2\right)A_{2j} - q\left(A_{2j-2} + A_{2j+2}\right) = 0 \quad j \in \{2,3,...\} \end{cases}$$

$$\textit{Coefficients} \quad A_{2l+1}, \quad a_{2n+1} \rightarrow a \Rightarrow \begin{cases} (a-1)A_1 - q(A_1 + A_3) = 0 \\ \left(a-(2j+1)^2\right)A_{2j+1} - q\left(A_{2j-1} + A_{2j+3}\right) = 0 \quad j \in \{1,2,...\} \end{cases}$$

$$\textit{Coefficients} \quad B_{2l+1} \quad , \quad b_{2n+1} \rightarrow b \Rightarrow \begin{cases} (b-1)B_1 - q(B_3 - B_1) = 0 \\ \left(b-(2j+1)^2\right)B_{2j+1} - q\left(B_{2j-1} + B_{2j+3}\right) = 0 \quad j \in \{1,2,...\} \end{cases}$$

$$\textit{Coefficients} \quad B_{2l+2} \quad , \quad b_{2n+2} \rightarrow b \Rightarrow \begin{cases} (b-4)B_2 - qB_4 = 0 \\ \left(b-(2j+2)^2\right)B_{2j+2} - q\left(B_{2j} + B_{2j+4}\right) = 0 \quad j \in \{1,2,...\} \end{cases}$$

*Sans démonstration le système de Diagonalisation présente la forme suivante pour les 4 séries de fonctions de Mathieu angulaires d'ordre entier. Pour les coefficients des fonctions angulaires paires :*

$$\begin{bmatrix} 0 & \sqrt{2}q & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \sqrt{2}q & 4 & q & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & q & 16 & q & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & q & ... & q & 0 \\ \cdots & \cdots & 0 & q & (2l)^2 & ... \\ 0 & \cdots & \cdots & ... & ... & ... \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2}A_0 \\ A_2 \\ A_4 \\ ... \\ A_{2l} \\ ... \end{bmatrix} = a_{2n} \begin{bmatrix} \sqrt{2}A_0 \\ A_2 \\ A_4 \\ ... \\ A_{2l} \\ ... \end{bmatrix} \quad et \quad \begin{bmatrix} 1+q & q & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ q & 9 & q & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & q & 25 & q & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & q & ... & q & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & q & (2l+1)^2 & ... \\ 0 & \cdots & 0 & ... & ... & ... \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_3 \\ A_5 \\ ... \\ A_{2l+1} \\ ... \end{bmatrix} = a_{2n+1} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_3 \\ A_5 \\ ... \\ A_{2l+1} \\ ... \end{bmatrix}$$

$l = 0,1,..$

*Pour les coefficients des fonctions angulaires impaires :*

$$\begin{bmatrix} 4 & q & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ q & 16 & q & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & q & 32 & q & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & q & ... & q & 0 \\ \cdots & \cdots & 0 & q & (2l+2)^2 & ... \\ 0 & \cdots & \cdots & ... & ... & ... \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2}B_0 \\ B_2 \\ B_4 \\ ... \\ B_{2l} \\ ... \end{bmatrix} = b_{2n+2} \begin{bmatrix} \sqrt{2}B_0 \\ B_2 \\ B_4 \\ ... \\ B_{2l} \\ ... \end{bmatrix} \quad et \quad \begin{bmatrix} 1-q & q & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ q & 9 & q & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & q & 25 & q & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & q & ... & q & 0 \\ \cdots & \cdots & 0 & q & (2l+1)^2 & ... \\ 0 & \cdots & \cdots & ... & ... & ... \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_3 \\ B_5 \\ ... \\ B_{2l+1} \\ ... \end{bmatrix} = b_{2n+1} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_3 \\ B_5 \\ ... \\ B_{2l+1} \\ ... \end{bmatrix}$$

$l = 0,1,..$

*Les différents systèmes linéaires sont en théorie de dimension infinie, mais la méthode de résolution approchée consiste à limiter la taille des matrices, comme nous le disions NxN, selon divers scénario :*
*- augmentation de la taille si la valeur approchée de la valeur propre caractéristique n'est suffisamment précise (sa variation obtenue entre deux tailles de matrice suffisamment faible)*
*- fixer une taille suffisamment grande d'après une formule connue entre la taille et les divers paramètres du problème : ordre entier et valeur de q. Les formules sont données notamment dans des ouvrages traitant des fonctions de Mathieu*

*Ces différents systèmes linéaires n'ont de solutions non triviales que lorsque les coefficients sont en réalité les vecteurs propres du système linéaire. C'est donc un problème de diagonalisation de la matrice au membre gauche et de la recherche des valeurs propres et vecteurs propres correspondant. La valeur caractéristique a ou b est alors la valeur propre minimale trouvée, et les coefficients du développement de Fourier sont le vecteur propre correspondant à cette valeur propre minimale. Si l'on range les valeurs propres par ordre croissant, alors les vecteurs propres sont les coefficients de Fourier pour des ordres successivement croissant à partir de l'ordre 2n ou 2n+1 choisi au départ (de deux en deux puisque l'on sépare les ordres paires des ordres impaires)*

*Une fois trouvée les coefficients, il convient de les normaliser pour cadrer avec la norme établie des fonctions de Mathieu angulaires périodiques d'ordre entier, qui sont les suivantes :*

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} dz\left(ce_{2n}(z,|q|)\right)^2 = 2\left(A_0^{(2n)}\right)^2 + \sum_{l=1}^{l=\infty}\left(A_{2l}^{(2n)}\right)^2 \quad \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} dz\left(ce_{2n+1}(z,|q|)\right)^2 = \sum_{l=0}^{l=\infty}\left(A_{2l+1}^{(2n+1)}\right)^2$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} dz\left(se_{2n+1}(z,|q|)\right)^2 = \sum_{l=0}^{l=\infty}\left(B_{2l+1}^{(2n+1)}\right)^2 \quad \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} dz\left(se_{2n+2}(z,|q|)\right)^2 = \sum_{l=0}^{l=\infty}\left(B_{2l+2}^{(2n+2)}\right)^2$$

$$\text{Normalisation choisie } \frac{\int_0^{2\pi} dz\left(ce_{2n}(z,|q|)\right)^2}{\pi} = \frac{\int_0^{2\pi} dz\left(ce_{2n+1}(z,|q|)\right)^2}{\pi} = \frac{\int_0^{2\pi} dz\left(se_{2n+1}(z,|q|)\right)^2}{\pi} = \frac{\int_0^{2\pi} dz\left(se_{2n+2}(z,|q|)\right)^2}{\pi} = 1$$

$$\Rightarrow 2\left(A_0^{(2n)}\right)^2 + \sum_{l=1}^{l=\infty}\left(A_{2l}^{(2n)}\right)^2 = 1 \quad et \quad \sum_{l=0}^{l=\infty}\left(A_{2l+1}^{(2n+1)}\right)^2 = 1 \quad et \quad \sum_{l=0}^{l=\infty}\left(B_{2l+1}^{(2n+1)}\right)^2 = 1 \quad et \quad \sum_{l=0}^{l=\infty}\left(B_{2l+2}^{(2n+2)}\right)^2 = 1$$

*Remarques :*

*- la construction des solutions paires et impaires pour des ordres non entiers est un peu du même cru, à ceci près que cette fois-ci il n'y a qu'un système linéaire à diagonaliser (voir plus loin dans ce document)*
*- la construction des secondes solutions (qui sont non périodiques) pour les ordres entier est plus compliquée.*

*Voici quelques autres formules utiles pour se lancer de le calcul des solutions des problèmes aux limites en configuration elliptique.*

***<u>Fonctions de Mathieu de première espèce (partie angulaire), cas q>0 :</u>***

*Décomposition des fonctions de première espèce de Mathieu (partie angulaire) à l'aide des fonctions sinusoïdales, série de Fourier :*

$$ce_{2n}(z,q)=\sum_{l=0}^{l=\infty}A_{2l}^{(2n)}Cos(2l\,z) \quad \textit{Nombre caractéristique } a_{2n}(q)$$

$$ce_{2n+1}(z,q)=\sum_{l=0}^{l=\infty}A_{2l+1}^{(2n+1)}Cos((2l+1)z) \quad \textit{Nombre caractéristique } a_{2n+1}(q)$$

$$se_{2n+1}(z,q)=\sum_{l=0}^{l=\infty}B_{2l+1}^{(2n+1)}Sin((2l+1)z) \quad \textit{Nombre caractéristique } b_{2n+1}(q)$$

$$se_{2n+2}(z,q)=\sum_{l=0}^{l=\infty}B_{2l+2}^{(2n+2)}Sin((2l+2)z) \quad \textit{Nombre caractéristique } b_{2n+2}(q)$$

*Dérivées des fonctions de première espèce de Mathieu (partie angulaire) à l'aide des fonctions sinusoïdales :*

$$\frac{d}{dz}\left[ce_{2n}(z,q)\right]=-\sum_{l=0}^{l=\infty}2l\,A_{2l}^{(2n)}Sin(2l\,z) \qquad \frac{d}{dz}\left[ce_{2n+1}(z,q)\right]=-\sum_{l=0}^{l=\infty}(2l+1)A_{2l+1}^{(2n+1)}Sin((2l+1)z)$$

$$\frac{d}{dz}\left[se_{2n+1}(z,q)\right]=\sum_{l=0}^{l=\infty}(2l+1)B_{2l+1}^{(2n+1)}Cos((2l+1)z) \qquad \frac{d}{dz}\left[se_{2n+2}(z,q)\right]=\sum_{l=0}^{l=\infty}(2l+2)B_{2l+2}^{(2n+2)}Cos((2l+2)z)$$

*Valeurs particulières en 0 et Pi/2 des fonctions de Mathieu angulaires de première espèce :*

$$ce_{2n}(0,q)=\sum_{l=0}^{l=\infty}A_{2l}^{(2n)} \qquad ce_{2n}(\frac{\pi}{2},q)=\sum_{l=0}^{l=\infty}(-1)^l A_{2l}^{(2n)} \qquad ce_{2n+1}(0,q)=\sum_{l=0}^{l=\infty}A_{2l+1}^{(2n+1)} \qquad ce_{2n+1}(\frac{\pi}{2},q)=0$$

$$se_{2n+1}(0,q)=0 \qquad se_{2n+1}(\frac{\pi}{2},q)=\sum_{l=0}^{l=\infty}(-1)^l B_{2l+1}^{(2n+1)} \qquad se_{2n+2}(0,q)=0 \qquad se_{2n+2}(\frac{\pi}{2},q)=0$$

*Valeurs particulières des dérivées premières en 0 et Pi/2 des fonctions de Mathieu angulaires de première espèce :*

$$\frac{d}{dz}\left[ce_{2n}(0,q)\right]=0 \quad \frac{d}{dz}\left[ce_{2n}(\frac{\pi}{2},q)\right]=0 \quad \frac{d}{dz}\left[ce_{2n+1}(0,q)\right]=0 \quad \frac{d}{dz}\left[ce_{2n+1}(\frac{\pi}{2},q)\right]=-\sum_{l=0}^{l=\infty}(2l+1)(-1)^l A_{2l+1}^{(2n+1)}$$

$$\frac{d}{dz}\left[se_{2n+1}(0,q)\right]=\sum_{l=0}^{l=\infty}(2l+1)B_{2l+1}^{(2n+1)} \quad \frac{d}{dz}\left[se_{2n+1}(\frac{\pi}{2},q)\right]=0$$

$$\frac{d}{dz}\left[se_{2n+2}(0,q)\right]=\sum_{l=0}^{l=\infty}(2l+2)B_{2l+2}^{(2n+2)} \quad \frac{d}{dz}\left[se_{2n+2}(\frac{\pi}{2},q)\right]=-\sum_{l=0}^{l=\infty}(2l+2)(-1)^l B_{2l+2}^{(2n+2)}$$

.

***Propriétés de parité, de périodicité, de translation des fonctions de Mathieu de première espèce (partie angulaire), cas q>0***

$$\textit{Periodicité } 2\pi$$
$$ce_n(z+2\pi,q)=ce_n(z,q) \quad se_n(z+2\pi,q)=se_n(z,q)$$
$$\textit{Periodicité } \pi$$
$$ce_{2n}(z+\pi,q)=ce_{2n}(z,q) \Leftrightarrow ce_{2n}(z+\pi,q)=ce_{2n}(z-\pi,q)=ce_{2n}(\pi-z,q)=ce_{2n}(z,q) \Rightarrow \textit{Symétrie } Y+$$
$$se_{2n+2}(z+\pi,q)=se_{2n+2}(z,q) \Leftrightarrow se_{2n+2}(z+\pi,q)=se_{2n+2}(z-\pi,q)=-se_{2n+2}(\pi-z,q)=se_{2n+2}(z,q) \Rightarrow \textit{Symétrie } Y-$$
$$\textit{Anti}-\textit{Periodicité } \pi$$
$$ce_{2n+1}(z+\pi,q)=-ce_{2n+1}(z,q) \Leftrightarrow ce_{2n+1}(z+\pi,q)=ce_{2n+1}(z-\pi,q)=ce_{2n+1}(\pi-z,q)=-ce_{2n+1}(z,q) \Rightarrow \textit{Symétrie } Y-$$
$$se_{2n+1}(z+\pi,q)=-se_{2n+1}(z,q) \Leftrightarrow se_{2n+1}(z+\pi,q)=se_{2n+1}(z-\pi,q)=-se_{2n+1}(\pi-z,q)=-se_{2n+1}(z,q) \Rightarrow \textit{Symétrie } Y+$$
$$\textit{Parité}$$
$$ce_n(-z,q)=ce_n(z,q) \Rightarrow \textit{Symétrie } X+$$
$$se_n(-z,q)=-se_n(z,q) \Rightarrow \textit{Symétrie } X-$$
$$\textit{Translation } \pi,\pi/2$$
$$ce_n(z+\pi,q)=(-1)^n ce_n(z,q) \quad se_n(z+\pi,q)=(-1)^n se_n(z,q)$$
$$ce_n(z+\frac{\pi}{2},q)=(-1)^n ce_n(\frac{\pi}{2}-z,q) \quad se_{n+1}(z+\frac{\pi}{2},q)=(-1)^n se_{n+1}(\frac{\pi}{2}-z,q)$$
$$ce_n(z+m\pi,q)=(-1)^n ce_n(m\pi-z,q) \quad se_n(z+m\pi,q)=-se_n(m\pi-z,q)$$

***Fonctions de Mathieu de première espèce (partie angulaire), cas q<0 :***

$$ce_{2n}(z,-q)=(-1)^n ce_{2n}\left(\frac{\pi}{2}-z,q\right) \qquad ce_{2n+1}(z,-q)=(-1)^n se_{2n+1}\left(\frac{\pi}{2}-z,q\right)$$
$$se_{2n+1}(z,-q)=(-1)^n ce_{2n+1}\left(\frac{\pi}{2}-z,q\right) \qquad se_{2n+2}(z,-q)=(-1)^n se_{2n+2}\left(\frac{\pi}{2}-z,q\right)$$

***Fonctions de Mathieu de deuxième espèce (partie angulaire), cas q<0 :***

$$fe_{2n}(z,-q)=(-1)^{n+1} fe_{2n}\left(\frac{\pi}{2}-z,q\right) \qquad fe_{2n+1}(z,-q)=(-1)^n ge_{2n+1}\left(\frac{\pi}{2}-z,q\right)$$
$$ge_{2n+1}(z,-q)=(-1)^n fe_{2n+1}\left(\frac{\pi}{2}-z,q\right) \qquad ge_{2n+2}(z,-q)=(-1)^n ge_{2n+2}\left(\frac{\pi}{2}-z,q\right)$$

***Changement de signe dans les coefficients du développement de Fourier :***

$$\begin{cases} A_{2l}^{(2n)} \to A_{2l}^{(2n)}(q) \\ A_{2l+1}^{(2n+1)} \to A_{2l+1}^{(2n+1)}(q) \\ B_{2l+1}^{(2n+1)} \to B_{2l+1}^{(2n+1)}(q) \\ B_{2l+2}^{(2n+2)} \to B_{2l+2}^{(2n+2)}(q) \end{cases} \qquad \begin{cases} A_{2l}^{(2n)}(-q) = (-1)^{n-l} A_{2l}^{(2n)}(q) \\ A_{2l+1}^{(2n+1)}(-q) = (-1)^{n-l} B_{2l+1}^{(2n+1)}(q) \\ B_{2l+1}^{(2n+1)}(-q) = (-1)^{n-l} A_{2l}^{(2n+1)}(q) \\ B_{2l+2}^{(2n+2)}(-q) = (-1)^{n-l} B_{2l+2}^{(2n+2)}(q) \end{cases}$$

*Ce qui donne pour les développements en série des fonctions de Mathieu de première espèce de paramètre q>0:*

$$ce_{2n}(z,-q) = (-1)^n \sum_{l=0}^{l=\infty} (-1)^l A_{2l}^{(2n)} Cos(2l\, z) \qquad ce_{2n+1}(z,-q) = (-1)^n \sum_{l=0}^{l=\infty} (-1)^l B_{2l+1}^{(2n+1)} Cos((2l+1)z)$$

$$se_{2n+1}(z,-q) = (-1)^n \sum_{l=0}^{l=\infty} (-1)^l A_{2l+1}^{(2n+1)} Sin((2l+1)z) \qquad se_{2n+2}(z,-q) = (-1)^n \sum_{l=0}^{l=\infty} (-1)^l B_{2l+2}^{(2n+2)} Sin((2l+2)z)$$

***Fonctions modifiées de Mathieu de première espèce (partie radiale), cas q>0 :***

*Fonctions modifiées de Mathieu de première espèce*

*Autres notations* $Je_{2n} \leftrightarrow Ce_{2n}, Je_{2n+1} \leftrightarrow Ce_{2n+1}, Jo_{2n+1} \leftrightarrow Se_{2n+1}, Jo_{2n+2} \leftrightarrow Se_{2n+2}$

*Parité*

$$Je_n(-z,q) = Je_n(z,q) \quad Jo_n(-z,q) = -Jo_n(z,q)$$

*Décomposition des fonctions modifiées de Mathieu de première espèce (partie radiale) à l'aide des fonctions hyperboliques :*

$$Je_{2n}(z,q) = ce_{2n}(i\, z,q) = \sum_{l=0}^{l=\infty} A_{2l}^{(2n)} Cosh(2l\, z) \quad \textit{Nombre caractéristique } a_{2n}(q)$$

$$Je_{2n+1}(z,q) = ce_{2n+1}(i\, z,q) = \sum_{l=0}^{l=\infty} A_{2l}^{(2n+1)} Cosh((2l+1)z) \quad \textit{Nombre caractéristique } a_{2n+1}(q)$$

$$Jo_{2n+1}(z,q) = -i\, se_{2n+1}(i\, z,q) = \sum_{l=0}^{l=\infty} B_{2l+1}^{(2n+1)} Sinh((2l+1)z) \quad \textit{Nombre caractéristique } b_{2n+1}(q)$$

$$Jo_{2n+2}(z,q) = -i\, se_{2n+2}(i\, z,q) = \sum_{l=0}^{l=\infty} B_{2l+2}^{(2n+2)} Sinh((2l+2)z) \quad \textit{Nombre caractéristique } b_{2n+2}(q)$$

*Décomposition des fonctions modifiées de Mathieu de première espèce (partie radiale) à l'aide des fonctions de Bessel J :*

$$Je_{2n}(z,q)=\frac{ce_{2n}(0,q)}{A_0^{(2n)}}\sum_{l=0}^{l=\infty}A_{2l}^{(2n)}J_{2l}(2\sqrt{q}Sinh(z))$$

$$Je_{2n+1}(z,q)=\frac{ce_{2n+1}(0,q)}{\sqrt{q}A_1^{(2n+1)}}Coth(z)\sum_{l=0}^{l=\infty}(2l+1)A_{2l+1}^{(2n+1)}J_{2l+1}(2\sqrt{q}Sinh(z))$$

$$Jo_{2n+1}(z,q)=\frac{\frac{\partial se_{2n+1}(0,q)}{\partial z}}{\sqrt{q}B_1^{(2n+1)}}\sum_{l=0}^{l=\infty}B_{2l+1}^{(2n+1)}J_{2l+1}(2\sqrt{q}Sinh(z))$$

$$Jo_{2n+2}(z,q)=\frac{\frac{\partial se_{2n+2}(0,q)}{\partial z}}{qB_2^{(2n+2)}}Coth(z)\sum_{l=0}^{l=\infty}(2l+2)B_{2l+2}^{(2n+2)}J_{2l+2}(2\sqrt{q}Sinh(z))$$

*Décomposition des fonctions modifiées de Mathieu de première espèce (partie radiale) à l'aide des fonctions de Bessel J :*

$$Je_{2n}(z,q)=\frac{ce_{2n}(\pi/2,q)}{A_0^{(2n)}}\sum_{l=0}^{l=\infty}(-1)^l A_{2l}^{(2n)}J_{2l}(2\sqrt{q}Cosh(z))$$

$$Je_{2n+1}(z,q)=-\frac{\frac{\partial ce_{2n+1}(\pi/2,q)}{\partial z}}{\sqrt{q}A_1^{(2n+1)}}\sum_{l=0}^{l=\infty}(-1)^l A_{2l+1}^{(2n+1)}J_{2l+1}(2\sqrt{q}Cosh(z))$$

$$Jo_{2n+1}(z,q)=\frac{se_{2n+1}(\pi/2,q)}{\sqrt{q}B_1^{(2n+1)}}Tanh(z)\sum_{l=0}^{l=\infty}(-1)^l(2l+1)B_{2l+1}^{(2n+1)}J_{2l+1}(2\sqrt{q}Cosh(z))$$

$$Jo_{2n+2}(z,q)=-\frac{\frac{\partial se_{2n+2}(\pi/2,q)}{\partial z}}{q\,B_2^{(2n+2)}}Tanh(z)\sum_{l=0}^{l=\infty}(-1)^l(2l+2)B_{2l+2}^{(2n+2)}J_{2l+2}(2\sqrt{q}Cosh(z))$$

*Décomposition des fonctions modifiées de Mathieu de première espèce (partie radiale) à l'aide de produits de fonctions de Bessel J :*

$$Je_{2n}(z,q)=\frac{ce_{2n}(0,q)ce_{2n}(\pi/2,q)}{\left(A_0^{(2n)}\right)^2}\sum_{l=0}^{l=\infty}(-1)^l A_{2l}^{(2n)}J_l(\sqrt{q}e^{-z})J_l(\sqrt{q}e^{z})$$

$$Je_{2n+1}(z,q)=-\frac{ce_{2n+1}(0,q)\frac{\partial ce_{2n+1}(\pi/2,q)}{\partial z}}{\sqrt{q}\left(A_1^{(2n+1)}\right)^2}\sum_{l=0}^{l=\infty}(-1)^l A_{2l+1}^{(2n+1)}\left(J_l(\sqrt{q}e^{-z})J_{l+1}(\sqrt{q}e^{z})+J_{l+1}(\sqrt{q}e^{-z})J_l(\sqrt{q}e^{z})\right)$$

$$Jo_{2n+1}(z,q)=\frac{se_{2n+1}(\pi/2,q)\frac{\partial se_{2n+1}(0,q)}{\partial z}}{\sqrt{q}\left(B_1^{(2n+1)}\right)^2}\sum_{l=0}^{l=\infty}(-1)^l B_{2l+1}^{(2n+1)}\left(J_l(\sqrt{q}e^{-z})J_{l+1}(\sqrt{q}e^{z})-J_{l+1}(\sqrt{q}e^{-z})J_l(\sqrt{q}e^{z})\right)$$

$$Jo_{2n+2}(z,q)=-\frac{\frac{\partial se_{2n+2}(0,q)}{\partial z}\frac{\partial se_{2n+2}(\pi/2,q)}{\partial z}}{q\left(B_2^{(2n+2)}\right)^2}\sum_{l=0}^{l=\infty}(-1)^l B_{2l+2}^{(2n+2)}\left(J_l(\sqrt{q}e^{-z})J_{l+2}(\sqrt{q}e^{z})-J_{l+2}(\sqrt{q}e^{-z})J_l(\sqrt{q}e^{z})\right)$$

***Fonctions modifiées de Mathieu de deuxième espèce (partie radiale) , cas q>0 :***

*Fonctions modifiées de Mathieu de deuxième espèce*

*Autres notations* $Fey_{2n} \leftrightarrow Ne_{2n}, Fey_{2n+1} \leftrightarrow Ne_{2n+1}, Gey_{2n+1} \leftrightarrow No_{2n+1}, Gey_{2n+2} \leftrightarrow No_{2n+2}$

*Parité*

$$Ne_n(-z,q) = Ne_n(z,q) \quad No_n(-z,q) = -No_n(z,q)$$

*Décomposition des fonctions modifiées de Mathieu de deuxième espèce (partie radiale) à l'aide des fonctions de Bessel Y (aussi notées Bessel N pour Neumann) :*

$$Ne_{2n}(z,q) = \frac{ce_{2n}(0,q)}{A_0^{(2n)}} \sum_{l=0}^{l=\infty} A_{2l}^{(2n)} Y_{2l}(2\sqrt{q}Sinh(z))$$

$$Ne_{2n+1}(z,q) = \frac{ce_{2n+1}(0,q)}{\sqrt{q}A_1^{(2n+1)}} Coth(z) \sum_{l=0}^{l=\infty} (2l+1) A_{2l+1}^{(2n+1)} Y_{2l+1}(2\sqrt{q}Sinh(z))$$

$$No_{2n+1}(z,q) = \frac{\frac{\partial se_{2n+1}(0,q)}{\partial z}}{\sqrt{q}B_1^{(2n+1)}} \sum_{l=0}^{l=\infty} B_{2l+1}^{(2n+1)} Y_{2l+1}(2\sqrt{q}Sinh(z))$$

$$No_{2n+2}(z,q) = \frac{\frac{\partial se_{2n+2}(0,q)}{\partial z}}{qB_2^{(2n+2)}} Coth(z) \sum_{l=0}^{l=\infty} (2l+2) B_{2l+2}^{(2n+2)} Y_{2l+2}(2\sqrt{q}Sinh(z))$$

*Décomposition des fonctions modifiées de Mathieu de deuxième espèce (partie radiale) à l'aide des fonctions de Bessel Y (aussi notées Bessel N pour Neumann) :*

$$Ne_{2n}(z,q) = \frac{ce_{2n}(\pi/2,q)}{A_0^{(2n)}} \sum_{l=0}^{l=\infty} (-1)^l A_{2l}^{(2n)} Y_{2l}(2\sqrt{q}Cosh(z))$$

$$Ne_{2n+1}(z,q) = -\frac{\frac{\partial ce_{2n+1}(\pi/2,q)}{\partial z}}{\sqrt{q}A_1^{(2n+1)}} \sum_{l=0}^{l=\infty} (-1)^l A_{2l+1}^{(2n+1)} Y_{2l+1}(2\sqrt{q}Cosh(z))$$

$$No_{2n+1}(z,q) = \frac{se_{2n+1}(\pi/2,q)}{\sqrt{q}B_1^{(2n+1)}} Tanh(z) \sum_{l=0}^{l=\infty} (-1)^l (2l+1) B_{2l+1}^{(2n+1)} Y_{2l+1}(2\sqrt{q}Cosh(z))$$

$$No_{2n+2}(z,q) = -\frac{\frac{\partial se_{2n+2}(\pi/2,q)}{\partial z}}{q\,B_2^{(2n+2)}} Tanh(z) \sum_{l=0}^{l=\infty} (-1)^l (2l+2) B_{2l+2}^{(2n+2)} Y_{2l+2}(2\sqrt{q}Cosh(z))$$

*Décomposition des fonctions modifiées de Mathieu de deuxième espèce (partie radiale) à l'aide de produits de fonctions de Bessel J et Y (aussi notées Bessel N pour Neumann) :*

$$Ne_{2n}(z,q)=\frac{ce_{2n}(0,q)ce_{2n}(\pi/2,q)}{\left(A_0^{(2n)}\right)^2}\sum_{l=0}^{l=\infty}(-1)^l A_{2l}^{(2n)}J_l(\sqrt{q}e^{-z})Y_l(\sqrt{q}e^{z})$$

$$Ne_{2n+1}(z,q)=-\frac{ce_{2n+1}(0,q)\frac{\partial ce_{2n+1}(\pi/2,q)}{\partial z}}{\sqrt{q}\left(A_1^{(2n+1)}\right)^2}\sum_{l=0}^{l=\infty}(-1)^l A_{2l+1}^{(2n+1)}\left(J_l(\sqrt{q}e^{-z})Y_{l+1}(\sqrt{q}e^{z})+J_{l+1}(\sqrt{q}e^{-z})Y_l(\sqrt{q}e^{z})\right)$$

$$No_{2n+1}(z,q)=\frac{se_{2n+1}(\pi/2,q)\frac{\partial se_{2n+1}(0,q)}{\partial z}}{\sqrt{q}\left(B_1^{(2n+1)}\right)^2}\sum_{l=0}^{l=\infty}(-1)^l B_{2l+1}^{(2n+1)}\left(J_l(\sqrt{q}e^{-z})Y_{l+1}(\sqrt{q}e^{z})-J_{l+1}(\sqrt{q}e^{-z})Y_l(\sqrt{q}e^{z})\right)$$

$$No_{2n+2}(z,q)=-\frac{\frac{\partial se_{2n+2}(0,q)}{\partial z}\frac{\partial se_{2n+2}(\pi/2,q)}{\partial z}}{q\left(B_2^{(2n+2)}\right)^2}\sum_{l=0}^{l=\infty}(-1)^l B_{2l+2}^{(2n+2)}\left(J_l(\sqrt{q}e^{-z})Y_{l+2}(\sqrt{q}e^{z})-J_{l+2}(\sqrt{q}e^{-z})Y_l(\sqrt{q}e^{z})\right)$$

***Important pour les fonctions Radiales Ie, Io, Ke, Ko****: tous les membres droits des formules sont calculés avec la valeur absolue du paramètre q ou ce qui est équivalent -q, car q est censé être négatif. Après vérification sur l'article de 2008 de J.C.Guttierez « Theory and numerical analysis of the Mathieu functions », et les formules du NIST « Handbook of Mathematical Functions, Chapter 28, Mathieu Functions and Hill's Equation, formules 28.24.6 à 28.24.13» et moyennant une constante de proportionnalité entre les deux sources J.C.Guttierez et NIST, il convient bien de travailler avec les valeurs absolue de « q ». Le comportement des fonctions Ie, Io et Ke, Ko est alors similaires à celui des fonctions Bessel I et K, soit monotone décroissant ou croissant, perdant ainsi leur caractère oscillatoire, contrairement aux fonction Je, Jo et Ne, No qui se comporte de manière similaire à Bessel J et Y (ou N en notation Neumann). Les formules sont tirés de l'article de J.C.Guttierez « Theory and numerical analysis of the Mathieu functions ».*

***Fonctions modifiées de Mathieu de première espèce (partie radiale), cas q<0 :***

$$\textit{Fonctions modifiées de Mathieu de première espèce, cas } q<0$$
$$\textit{Autres notations } Ie_{2n}\leftrightarrow Je_{2n}(-q), Ie_{2n+1}\leftrightarrow Je_{2n+1}(-q), Io_{2n+1}\leftrightarrow Jo_{2n+1}(-q), Io_{2n+2}\leftrightarrow Jo_{2n+2}(-q)$$

$$\textit{Parité}\quad Ie_n(-z,-q)=Ie_n(z,-q)\quad Io_n(-z,-q)=-Io_n(z,-q)$$

*Décomposition des fonctions modifiées de Mathieu de première espèce (partie radiale) à l'aide des fonctions hyperboliques :*

$$Ie_{2n}(z,-q)=(-1)^n Je_{2n}\left(z+i\frac{\pi}{2},|q|\right)=(-1)^n\sum_{l=0}^{l=\infty}(-1)^j A_{2l}^{(2n)}Cosh(2l\,z)$$

$$Ie_{2n+1}(z,-q)=(-1)^{n+1}i\,Jo_{2n+1}\left(z+i\frac{\pi}{2},|q|\right)=(-1)^n\sum_{l=0}^{l=\infty}(-1)^j B_{2l+1}^{(2n+1)}Cosh((2l+1)z)$$

$$Io_{2n+1}(z,-q)=(-1)^{n+1}i\,Je_{2n+1}\left(z+i\frac{\pi}{2},|q|\right)=(-1)^n\sum_{l=0}^{l=\infty}(-1)^j A_{2l+1}^{(2n+1)}Sinh((2l+1)z)$$

$$Io_{2n+2}(z,-q)=(-1)^{n+1}Jo_{2n+2}\left(z+i\frac{\pi}{2},|q|\right)=(-1)^n\sum_{l=0}^{l=\infty}(-1)^j B_{2l+2}^{(2n+2)}Sinh((2l+2)z)$$

.

*Décomposition des fonctions modifiées de Mathieu de première espèce (partie radiale) à l'aide des fonctions de Bessel I :*

$$Ie_{2n}(z,-q)=(-1)^n\frac{ce_{2n}(\pi/2,|q|)}{A_0^{(2n)}}\sum_{l=0}^{l=\infty}A_{2l}^{(2n)}I_{2l}(2\sqrt{|q|}Sinh(z))$$

$$Ie_{2n+1}(z,-q)=(-1)^n\frac{se_{2n+1}(\pi/2,|q|)}{\sqrt{|q|}B_1^{(2n+1)}}Coth(z)\sum_{l=0}^{l=\infty}(2l+1)B_{2l+1}^{(2n+1)}I_{2l+1}(2\sqrt{|q|}Sinh(z))$$

$$Io_{2n+1}(z,-q)=(-1)^{n+1}\frac{\frac{\partial ce_{2n+1}(\pi/2,|q|)}{\partial z}}{\sqrt{|q|}A_1^{(2n+1)}}\sum_{l=0}^{l=\infty}A_{2l+1}^{(2n+1)}I_{2l+1}(2\sqrt{|q|}Sinh(z))$$

$$Io_{2n+2}(z,-q)=(-1)^{n+1}\frac{\frac{\partial se_{2n+2}(\pi/2,|q|)}{\partial z}}{|q|B_2^{(2n+2)}}Coth(z)\sum_{l=0}^{l=\infty}(2l+2)B_{2l+2}^{(2n+2)}I_{2l+2}(2\sqrt{|q|}Sinh(z))$$

*Décomposition des fonctions modifiées de Mathieu de première espèce (partie radiale) à l'aide des fonctions de Bessel I :*

$$Ie_{2n}(z,-q)=(-1)^n\frac{ce_{2n}(0,|q|)}{A_0^{(2n)}}\sum_{l=0}^{l=\infty}(-1)^l A_{2l}^{(2n)}I_{2l}(2\sqrt{q}Cosh(z))$$

$$Ie_{2n+1}(z,-q)=(-1)^n\frac{\frac{\partial se_{2n+1}(0,|q|)}{\partial z}}{\sqrt{|q|}B_1^{(2n+1)}}\sum_{l=0}^{l=\infty}(-1)^l B_{2l+1}^{(2n+1)}I_{2l+1}(2\sqrt{|q|}Cosh(z))$$

$$Io_{2n+1}(z,-q)=(-1)^n\frac{ce_{2n+1}(0,|q|)}{\sqrt{|q|}A_1^{(2n+1)}}Tanh(z)\sum_{l=0}^{l=\infty}(-1)^l(2l+1)A_{2l+1}^{(2n+1)}I_{2l+1}(2\sqrt{|q|}Cosh(z))$$

$$Io_{2n+2}(z,-q)=(-1)^n\frac{\frac{\partial se_{2n+2}(0,|q|)}{\partial z}}{|q|B_2^{(2n+2)}}Tanh(z)\sum_{l=0}^{l=\infty}(-1)^l(2l+2)B_{2l+2}^{(2n+2)}I_{2l+2}(2\sqrt{|q|}Cosh(z))$$

*Décomposition des fonctions modifiées de Mathieu de première espèce (partie radiale) à l'aide de produits de fonctions de Bessel I :*

$$Ie_{2n}(z,-q)=(-1)^n\frac{ce_{2n}(0,|q|)ce_{2n}(\pi/2,|q|)}{\left(A_0^{(2n)}\right)^2}\sum_{l=0}^{l=\infty}(-1)^l A_{2l}^{(2n)}I_l(\sqrt{|q|}e^{-z})I_l(\sqrt{|q|}e^{z})$$

$$Ie_{2n+1}(z,-q)=(-1)^n\frac{se_{2n+1}(\pi/2,|q|)\frac{\partial se_{2n+1}(0,|q|)}{\partial z}}{\sqrt{|q|}\left(B_1^{(2n+1)}\right)^2}\sum_{l=0}^{l=\infty}(-1)^l B_{2l+1}^{(2n+1)}\left(I_l(\sqrt{|q|}e^{-z})I_{l+1}(\sqrt{|q|}e^{z})+I_{l+1}(\sqrt{|q|}e^{-z})I_l(\sqrt{|q|}e^{z})\right)$$

$$Io_{2n+1}(z,-q)=(-1)^n\frac{ce_{2n+1}(0,|q|)\frac{\partial ce_{2n+1}(\pi/2,|q|)}{\partial z}}{\sqrt{|q|}\left(A_1^{(2n+1)}\right)^2}\sum_{l=0}^{l=\infty}(-1)^l A_{2l+1}^{(2n+1)}\left(I_l(\sqrt{|q|}e^{-z})I_{l+1}(\sqrt{|q|}e^{z})-I_{l+1}(\sqrt{|q|}e^{-z})I_l(\sqrt{|q|}e^{z})\right)$$

$$Io_{2n+2}(z,-q)=(-1)^{n+1}\frac{\frac{\partial se_{2n+2}(0,|q|)}{\partial z}\frac{\partial se_{2n+2}(\pi/2,|q|)}{\partial z}}{|q|\left(B_2^{(2n+2)}\right)^2}\sum_{l=0}^{l=\infty}(-1)^l B_{2l+2}^{(2n+2)}\left(I_l(\sqrt{|q|}e^{-z})I_{l+2}(\sqrt{|q|}e^{z})-I_{l+2}(\sqrt{|q|}e^{-z})I_l(\sqrt{|q|}e^{z})\right)$$

***Fonctions modifiées de Mathieu de deuxième espèce (partie radiale), cas q<0 :***

*Fonctions modifiées de Mathieu de deuxième espèce, cas* $q < 0$

*Autres notations* $Ke_{2n} \leftrightarrow Fek_{2n}(-q), Ke_{2n+1} \leftrightarrow Fek_{2n+1}(-q), Ko_{2n+1} \leftrightarrow Gek_{2n+1}(-q), Ko_{2n+2} \leftrightarrow Gek_{2n+2}(-q)$

*Parité* $Ke_n(-z,q) = Ke_n(z,q) \quad Ko_n(-z,q) = -Ko_n(z,q)$

*Relations entre les fonctions modifiées de Mathieu de deuxième espèce (partie radiale) :*

$$Ke_{2n}(z,-q) = (-1)^n Ke_{2n}(z,q+i\frac{\pi}{2}) \qquad Ke_{2n}(z,q) = (-1)^n Ke_{2n}(z-i\frac{\pi}{2},-q)$$

$$Ke_{2n+1}(z,-q) = (-1)^n Ko_{2n+1}(z,q+i\frac{\pi}{2}) \qquad Ke_{2n+1}(z,q) = (-1)^n Ko_{2n+1}(z-i\frac{\pi}{2},-q)$$

$$Ko_{2n+1}(z,-q) = (-1)^n Ke_{2n+1}(z,q+i\frac{\pi}{2}) \qquad Ko_{2n+1}(z,q) = (-1)^n Ke_{2n+1}(z-i\frac{\pi}{2},-q)$$

$$Ko_{2n+2}(z,-q) = (-1)^{n+1} Ko_{2n+2}(z,q+i\frac{\pi}{2}) \qquad Ko_{2n+2}(z,q) = (-1)^{n+1} Ko_{2n+2}(z-i\frac{\pi}{2},-q)$$

*Décomposition des fonctions modifiées de Mathieu de deuxième espèce (partie radiale) à l'aide des fonctions de Bessel K :*

$$Ke_{2n}(z,-q) = (-1)^n \frac{ce_{2n}(\pi/2,|q|)}{\pi\, A_0^{(2n)}} \sum_{l=0}^{l=\infty} A_{2l}^{(2n)} K_{2l}(2\sqrt{|q|}Sinh(z))$$

$$Ke_{2n+1}(z,-q) = \frac{se_{2n+1}(\pi/2,|q|)}{\pi\sqrt{|q|}B_1^{(2n+1)}} Coth(z) \sum_{l=0}^{l=\infty} (2l+1) B_{2l+1}^{(2n+1)} K_{2l+1}(2\sqrt{|q|}Sinh(z))$$

$$Ko_{2n+1}(z,-q) = (-1)^{n+1} \frac{\frac{\partial ce_{2n+1}(\pi/2,|q|)}{\partial z}}{\pi\sqrt{|q|}A_1^{(2n+1)}} \sum_{l=0}^{l=\infty} A_{2l+1}^{(2n+1)} K_{2l+1}(2\sqrt{|q|}Sinh(z))$$

$$Ko_{2n+2}(z,-q) = (-1)^{n+1} \frac{\frac{\partial se_{2n+2}(\pi/2,|q|)}{\partial z}}{\pi|q|B_2^{(2n+2)}} Coth(z) \sum_{l=0}^{l=\infty} (2l+2) B_{2l+2}^{(2n+2)} K_{2l+2}(2\sqrt{|q|}Sinh(z))$$

*Décomposition des fonctions modifiées de Mathieu de deuxième espèce (partie radiale) à l'aide des fonctions de Bessel K:*

$$Ke_{2n}(z,-q) = (-1)^n \frac{ce_{2n}(0,|q|)}{\pi\, A_0^{(2n)}} \sum_{l=0}^{l=\infty} (-1)^l A_{2l}^{(2n)} K_{2l}(2\sqrt{|q|}Cosh(z))$$

$$Ke_{2n+1}(z,-q) = (-1)^n \frac{\frac{\partial se_{2n+1}(0,|q|)}{\partial z}}{\pi\sqrt{|q|}B_1^{(2n+1)}} \sum_{l=0}^{l=\infty} (-1)^l B_{2l+1}^{(2n+1)} K_{2l+1}(2\sqrt{|q|}Cosh(z))$$

$$Ko_{2n+1}(z,-q) = (-1)^n \frac{ce_{2n+1}(0,|q|)}{\pi\sqrt{|q|}A_1^{(2n+1)}} Tanh(z) \sum_{l=0}^{l=\infty} (-1)^l (2l+1) A_{2l+1}^{(2n+1)} K_{2l+1}(2\sqrt{|q|}Cosh(z))$$

$$Ko_{2n+2}(z,-q) = (-1)^n \frac{\frac{\partial se_{2n+2}(0,|q|)}{\partial z}}{\pi|q|B_2^{(2n+2)}} Tanh(z) \sum_{l=0}^{l=\infty} (-1)^l (2l+2) B_{2l+2}^{(2n+2)} K_{2l+2}(2\sqrt{|q|}Cosh(z))$$

*Décomposition des fonctions modifiées de Mathieu de deuxième espèce (partie radiale) à l'aide de produits de fonctions de Bessel I et K :*

$$Ke_{2n}(z,-q) = (-1)^n \frac{ce_{2n}(0,|q|)ce_{2n}(\pi/2,|q|)}{\pi\left(A_0^{(2n)}\right)^2}\sum_{l=0}^{l=\infty} A_{2l}^{(2n)} I_l(\sqrt{|q|}e^{-z})K_l(\sqrt{|q|}e^{z})$$

$$Ke_{2n+1}(z,-q) = (-1)^n \frac{se_{2n+1}(\pi/2,|q|)\dfrac{\partial se_{2n+1}(0,|q|)}{\partial z}}{\pi\sqrt{|q|}\left(B_1^{(2n+1)}\right)^2}\sum_{l=0}^{l=\infty} B_{2l+1}^{(2n+1)}\left(I_l(\sqrt{|q|}e^{-z})K_{l+1}(\sqrt{|q|}e^{z}) + I_{l+1}(\sqrt{|q|}e^{-z})K_l(\sqrt{|q|}e^{z})\right)$$

$$Ko_{2n+1}(z,-q) = (-1)^{n+1} \frac{ce_{2n+1}(0,|q|)\dfrac{\partial ce_{2n+1}(\pi/2,|q|)}{\partial z}}{\pi\sqrt{|q|}\left(A_1^{(2n+1)}\right)^2}\sum_{l=0}^{l=\infty} A_{2l+1}^{(2n+1)}\left(I_l(\sqrt{|q|}e^{-z})K_{l+1}(\sqrt{|q|}e^{z}) + I_{l+1}(\sqrt{|q|}e^{-z})K_l(\sqrt{|q|}e^{z})\right)$$

$$Ko_{2n+2}(z,-q) = (-1)^{n+1} \frac{\dfrac{\partial se_{2n+2}(0,|q|)}{\partial z}\dfrac{\partial se_{2n+2}(\pi/2,|q|)}{\partial z}}{\pi|q|\left(B_2^{(2n+2)}\right)^2}\sum_{l=0}^{l=\infty} B_{2l+2}^{(2n+2)}\left(I_l(\sqrt{|q|}e^{-z})K_{l+2}(\sqrt{|q|}e^{z}) - I_{l+2}(\sqrt{|q|}e^{-z})K_l(\sqrt{|q|}e^{z})\right)$$

***<u>Dérivées des fonctions modifiées de Mathieu de première espèce (partie radiale), cas q>0 :</u>***

*Par dérivation des formules :*

$$Je_{2n}(z,q) = \frac{ce_{2n}(0,q)}{A_0^{(2n)}}\sum_{l=0}^{l=\infty} A_{2l}^{(2n)} J_{2l}(2\sqrt{q}Sinh(z))$$

$$Je_{2n+1}(z,q) = \frac{ce_{2n+1}(0,q)}{\sqrt{q}A_1^{(2n+1)}}Coth(z)\sum_{l=0}^{l=\infty}(2l+1)A_{2l+1}^{(2n+1)} J_{2l+1}(2\sqrt{q}Sinh(z))$$

$$Jo_{2n+1}(z,q) = \frac{\dfrac{\partial se_{2n+1}(0,q)}{\partial z}}{\sqrt{q}B_1^{(2n+1)}}\sum_{l=0}^{l=\infty} B_{2l+1}^{(2n+1)} J_{2l+1}(2\sqrt{q}Sinh(z))$$

$$Jo_{2n+2}(z,q) = \frac{\dfrac{\partial se_{2n+2}(0,q)}{\partial z}}{qB_2^{(2n+2)}}Coth(z)\sum_{l=0}^{l=\infty}(2l+2)B_{2l+2}^{(2n+2)} J_{2l+2}(2\sqrt{q}Sinh(z))$$

*et avec l'aide de la formule de la dérivée des fonctions de Bessel, on obtient :*

$$\frac{d\,Je_{2n}(z,q)}{dz} = \frac{ce_{2n}(0,q)}{A_0^{(2n)}}\sqrt{q}Cosh(z)\sum_{l=0}^{l=\infty} A_{2l}^{(2n)}\left(J_{2l-1}(2\sqrt{q}Sinh(z)) - J_{2l+1}(2\sqrt{q}Sinh(z))\right)$$

$$\frac{d\,Je_{2n+1}(z,q)}{dz} = -\frac{\dfrac{\partial ce_{2n+1}(\pi/2,q)}{\partial z}}{A_1^{(2n+1)}}Sinh(z)\sum_{l=0}^{l=\infty}(-1)^l A_{2l+1}^{(2n+1)}\left(J_{2l}(2\sqrt{q}Cosh(z)) - J_{2l+2}(2\sqrt{q}Cosh(z))\right)$$

$$\frac{d\,Jo_{2n+1}(z,q)}{dz} = \frac{\dfrac{\partial se_{2n+1}(0,q)}{\partial z}}{B_1^{(2n+1)}}Cosh(z)\sum_{l=0}^{l=\infty}(-1)^l(2l+1)B_{2l+1}^{(2n+1)}\left(J_{2l}(2\sqrt{q}Sinh(z)) - J_{2l+2}(2\sqrt{q}Sinh(z))\right)$$

$$\frac{d\,Jo_{2n+2}(z,q)}{dz} = \frac{\dfrac{\partial se_{2n+2}(\pi/2,q)}{\partial z}}{B_2^{(2n+2)}\sqrt{q}Cosh(z)}\sum_{l=0}^{l=\infty}(-1)^{l+1}B_{2l+2}^{(2n+2)}\begin{pmatrix}\left[1+(2l+2)Sinh^2(z)\right]J_{2l+1}(2\sqrt{q}Cosh(z)) + \\ +\left[1-(2l+2)Sinh^2(z)\right]J_{2l+3}(2\sqrt{q}Cosh(z))\end{pmatrix}$$

***<u>Dérivées des fonctions modifiées de Mathieu de deuxième espèce (partie radiale) , cas q>0 :</u>***

*A l'aide des formules :*

$$Ne_{2n}(z,q)=\frac{ce_{2n}(0,q)ce_{2n}(\pi/2,q)}{\left(A_0^{(2n)}\right)^2}\sum_{l=0}^{l=\infty}(-1)^l A_{2l}^{(2n)}J_l(\sqrt{q}e^{-z})Y_l(\sqrt{q}e^{z})$$

$$Ne_{2n+1}(z,q)=-\frac{ce_{2n+1}(0,q)\dfrac{\partial ce_{2n+1}(\pi/2,q)}{\partial z}}{\sqrt{q}\left(A_1^{(2n+1)}\right)^2}\sum_{l=0}^{l=\infty}(-1)^l A_{2l+1}^{(2n+1)}\left(J_l(\sqrt{q}e^{-z})Y_{l+1}(\sqrt{q}e^{z})+J_{l+1}(\sqrt{q}e^{-z})Y_l(\sqrt{q}e^{z})\right)$$

$$No_{2n+1}(z,q)=\frac{se_{2n+1}(\pi/2,q)\dfrac{\partial se_{2n+1}(0,q)}{\partial z}}{\sqrt{q}\left(B_1^{(2n+1)}\right)^2}\sum_{l=0}^{l=\infty}(-1)^l B_{2l+1}^{(2n+1)}\left(J_l(\sqrt{q}e^{-z})Y_{l+1}(\sqrt{q}e^{z})-J_{l+1}(\sqrt{q}e^{-z})Y_l(\sqrt{q}e^{z})\right)$$

$$No_{2n+2}(z,q)=-\frac{\dfrac{\partial se_{2n+2}(0,q)}{\partial z}\dfrac{\partial se_{2n+2}(\pi/2,q)}{\partial z}}{q\left(B_2^{(2n+2)}\right)^2}\sum_{l=0}^{l=\infty}(-1)^l B_{2l+2}^{(2n+2)}\left(J_l(\sqrt{q}e^{-z})Y_{l+2}(\sqrt{q}e^{z})-J_{l+2}(\sqrt{q}e^{-z})Y_l(\sqrt{q}e^{z})\right)$$

*et par dérivation terme à terme on obtient :*

$$\frac{d\,Ne_{2n}(z,q)}{dz}=$$

$$\frac{ce_{2n}(0,q)ce_{2n}(\pi/2,q)}{\left(A_0^{(2n)}\right)^2}\sum_{l=0}^{l=\infty}(-1)^l A_{2l}^{(2n)}\left(\sqrt{q}e^{-z}J_{l+1}(\sqrt{q}e^{-z})Y_l(\sqrt{q}e^{z})-\sqrt{q}e^{z}J_l(\sqrt{q}e^{-z})Y_{l+1}(\sqrt{q}e^{z})\right)$$

$$\frac{d\,Ne_{2n+1}(z,q)}{dz}=$$

$$=-\frac{ce_{2n+1}(0,q)\dfrac{\partial ce_{2n+1}(\pi/2,q)}{\partial z}}{\sqrt{q}\left(A_1^{(2n+1)}\right)^2}\sum_{l=0}^{l=\infty}(-1)^l A_{2l+1}^{(2n+1)}\begin{Bmatrix}2\sqrt{q}Sinh(z)\left(J_l(\sqrt{q}e^{-z})Y_l(\sqrt{q}e^{z})-J_{l+1}(\sqrt{q}e^{-z})Y_{l+1}(\sqrt{q}e^{z})\right)\\+(2l+1)\left(J_{l+1}(\sqrt{q}e^{-z})Y_l(\sqrt{q}e^{z})-J_l(\sqrt{q}e^{-z})Y_{l+1}(\sqrt{q}e^{z})\right)\end{Bmatrix}$$

$$\frac{d\,No_{2n+1}(z,q)}{dz}=$$

$$=\frac{se_{2n+1}(\pi/2,q)\dfrac{\partial se_{2n+1}(0,q)}{\partial z}}{\sqrt{q}\left(B_1^{(2n+1)}\right)^2}\sum_{l=0}^{l=\infty}(-1)^l B_{2l+1}^{(2n+1)}\begin{Bmatrix}2\sqrt{q}Cosh(z)\left(J_l(\sqrt{q}e^{-z})Y_l(\sqrt{q}e^{z})+J_{l+1}(\sqrt{q}e^{-z})Y_{l+1}(\sqrt{q}e^{z})\right)\\-(2l+1)\left(J_{l+1}(\sqrt{q}e^{-z})Y_l(\sqrt{q}e^{z})+J_l(\sqrt{q}e^{-z})Y_{l+1}(\sqrt{q}e^{z})\right)\end{Bmatrix}$$

$$\frac{d\,No_{2n+2}(z,q)}{dz}=$$

$$=\frac{\dfrac{\partial se_{2n+2}(0,q)}{\partial z}\dfrac{\partial se_{2n+2}(\pi/2,q)}{\partial z}}{q\left(B_2^{(2n+2)}\right)^2}\sum_{l=0}^{l=\infty}(-1)^{l+1} B_{2l+2}^{(2n+2)}(4l+4)\begin{Bmatrix}J_l(\sqrt{q}e^{-z})Y_l(\sqrt{q}e^{z})+Cosh(2z)J_{l+1}(\sqrt{q}e^{-z})Y_{l+1}(\sqrt{q}e^{z})\\-\dfrac{(l+1)}{\sqrt{q}}\left(e^{z}J_{l+1}(\sqrt{q}e^{-z})Y_l(\sqrt{q}e^{z})+e^{-z}J_l(\sqrt{q}e^{-z})Y_{l+1}(\sqrt{q}e^{z}\right.\end{Bmatrix}$$

## *A l'aide de toutes les formules suivantes de dérivation*

$$I_\nu{}'(z) = \frac{\nu}{z} I_\nu(z) + I_{\nu+1}(z) \quad I_\nu{}'(z) = I_{\nu-1}(z) - \frac{\nu}{z} I_\nu(z)$$

$$K_\nu{}'(z) = \frac{\nu}{z} K_\nu(z) - K_{\nu+1}(z) \quad K_\nu{}'(z) = -K_{\nu-1}(z) - \frac{\nu}{z} K_\nu(z)$$

$$I_{\nu+2}(z) = I_\nu(z) - \frac{2(\nu+1)}{z} I_{\nu+1}(z) \quad K_{\nu+2}(z) = K_\nu(z) + \frac{2(\nu+1)}{z} K_{\nu+1}(z)$$

$$I_l{}'(\sqrt{|q|}e^{-z}) = \frac{l}{\sqrt{|q|}e^{-z}} I_l(\sqrt{|q|}e^{-z}) + I_{l+1}(\sqrt{|q|}e^{-z}) \quad et \quad I_l{}'(\sqrt{|q|}e^{z}) = \frac{l}{\sqrt{|q|}e^{z}} I_l(\sqrt{|q|}e^{z}) + I_{l+1}(\sqrt{|q|}e^{z})$$

$$I_{l+2}{}'(\sqrt{|q|}e^{-z}) = I_{l+1}(\sqrt{|q|}e^{-z}) - \frac{l+2}{\sqrt{|q|}e^{-z}} I_{l+2}(\sqrt{|q|}e^{-z})$$

$$K_{l+2}{}'(\sqrt{|q|}e^{-z}) = -K_{l+1}(\sqrt{|q|}e^{-z}) - \frac{l+2}{\sqrt{|q|}e^{-z}} K_{l+2}(\sqrt{|q|}e^{-z}) \quad et \quad K_{l+2}{}'(\sqrt{|q|}e^{z}) = -K_{l+1}(\sqrt{|q|}e^{z}) - \frac{l+2}{\sqrt{|q|}e^{z}} K_{l+2}(\sqrt{|q|}e^{z})$$

$$K_l{}'(\sqrt{|q|}e^{z}) = \frac{l}{\sqrt{|q|}e^{z}} K_l(\sqrt{|q|}e^{z}) - K_{l+1}(\sqrt{|q|}e^{z})$$

$$K_{l+2}(\sqrt{|q|}e^{-z}) = K_l(\sqrt{|q|}e^{-z}) + \frac{2l+2}{\sqrt{|q|}e^{-z}} K_{l+1}(\sqrt{|q|}e^{-z}) \quad K_{l+2}(\sqrt{|q|}e^{z}) = K_l(\sqrt{|q|}e^{z}) + \frac{2l+2}{\sqrt{|q|}e^{z}} K_{l+1}(\sqrt{|q|}e^{z})$$

$$I_{l+2}(\sqrt{|q|}e^{-z}) = I_l(\sqrt{|q|}e^{-z}) - \frac{2l+2}{\sqrt{|q|}e^{-z}} I_{l+1}(\sqrt{|q|}e^{-z}) \quad I_{l+2}(\sqrt{|q|}e^{z}) = I_l(\sqrt{|q|}e^{z}) - \frac{2l+2}{\sqrt{|q|}e^{z}} I_{l+1}(\sqrt{|q|}e^{z})$$

*On obtient les fonctions dérivées des Radiales Ie, Io, Ke et Ko, dans ce qui suit .*

## *Dérivées des fonctions modifiées de Mathieu de deuxième espèce (partie radiale), cas q<0 :*

*A partir de ces formules :*

$$Ke_{2n}(z,-q) = (-1)^n \frac{ce_{2n}(0,|q|)ce_{2n}(\pi/2,|q|)}{\pi\left(A_0^{(2n)}\right)^2} \sum_{l=0}^{l=\infty} A_{2l}^{(2n)} I_l(\sqrt{|q|}e^{-z}) K_l(\sqrt{|q|}e^{z})$$

$$Ke_{2n+1}(z,-q) = (-1)^n \frac{se_{2n+1}(\pi/2,|q|)\dfrac{\partial se_{2n+1}(0,|q|)}{\partial z}}{\pi\sqrt{|q|}\left(B_1^{(2n+1)}\right)^2} \sum_{l=0}^{l=\infty} B_{2l+1}^{(2n+1)} \left(I_l(\sqrt{|q|}e^{-z})K_{l+1}(\sqrt{|q|}e^{z}) - I_{l+1}(\sqrt{|q|}e^{-z})K_l(\sqrt{|q|}e^{z})\right)$$

$$Ko_{2n+1}(z,-q) = (-1)^{n+1} \frac{ce_{2n+1}(0,|q|)\dfrac{\partial ce_{2n+1}(\pi/2,|q|)}{\partial z}}{\pi\sqrt{q}\left(A_1^{(2n+1)}\right)^2} \sum_{l=0}^{l=\infty} A_{2l+1}^{(2n+1)} \left(I_l(\sqrt{|q|}e^{-z})K_{l+1}(\sqrt{|q|}e^{z}) + I_{l+1}(\sqrt{|q|}e^{-z})K_l(\sqrt{|q|}e^{z})\right)$$

$$Ko_{2n+2}(z,-q) = (-1)^{n+1} \frac{\dfrac{\partial se_{2n+2}(0,|q|)}{\partial z}\dfrac{\partial se_{2n+2}(\pi/2,|q|)}{\partial z}}{\pi|q|\left(B_2^{(2n+2)}\right)^2} \sum_{l=0}^{l=\infty} B_{2l+2}^{(2n+2)} \left(I_l(\sqrt{|q|}e^{-z})K_{l+2}(\sqrt{|q|}e^{z}) - I_{l+2}(\sqrt{|q|}e^{-z})K_l(\sqrt{|q|}e^{z})\right)$$

*et en dérivant terme à terme on obtient :*

$$\frac{d}{dz}Ke_{2n}(z,-q) =$$
$$= (-1)^{n+1}\frac{ce_{2n}(0,|q|)ce_{2n}(\pi/2,|q|)}{\left(A_0^{(2n)}\right)^2}\sum_{l=0}^{l=\infty}A_{2l}^{(2n)}\left(\sqrt{|q|}e^{z}I_l(\sqrt{|q|}e^{-z})K_{l-1}(\sqrt{|q|}e^{z})+\sqrt{|q|}e^{-z}I_{l-1}(\sqrt{|q|}e^{-z})K_l(\sqrt{|q|}e^{z})\right)$$

$$\frac{d}{dz}Ke_{2n+1}(z,-q) =$$
$$= (-1)^{n+1}\frac{ce_{2n+1}(0,|q|)\dfrac{\partial ce_{2n+1}(\pi/2,|q|)}{\partial z}}{\sqrt{|q|}\left(A_1^{(2n+1)}\right)^2}\sum_{l=0}^{l=\infty}B_{2l+1}^{(2n+1)}\left\{\begin{array}{l}2\sqrt{|q|}Sinh(z)\left(I_l(\sqrt{|q|}e^{-z})K_l(\sqrt{|q|}e^{z})-I_{l+1}(\sqrt{|q|}e^{-z})K_{l+1}(\sqrt{|q|}e^{z})\right)\\+(2l+1)\left(I_{l+1}(\sqrt{|q|}e^{-z})K_l(\sqrt{|q|}e^{z})+I_l(\sqrt{|q|}e^{-z})K_{l+1}(\sqrt{|q|}e^{z})\right)\end{array}\right\}$$

$$\frac{d}{dz}Ko_{2n+1}(z,-q) =$$
$$= (-1)^{n}\frac{se_{2n+1}(\pi/2,|q|)\dfrac{\partial se_{2n+1}(0,|q|)}{\partial z}}{\sqrt{|q|}\left(B_1^{(2n+1)}\right)^2}\sum_{l=0}^{l=\infty}A_{2l+1}^{(2n+1)}\left\{\begin{array}{l}2\sqrt{|q|}Cosh(z)\left(I_l(\sqrt{|q|}e^{-z})K_l(\sqrt{|q|}e^{z})+I_{l+1}(\sqrt{|q|}e^{-z})K_{l+1}(\sqrt{|q|}e^{z})\right)\\+(2l+1)\left(I_l(\sqrt{|q|}e^{-z})K_{l+1}(\sqrt{|q|}e^{z})-I_{l+1}(\sqrt{|q|}e^{-z})K_l(\sqrt{|q|}e^{z})\right)\end{array}\right\}$$

$$\frac{d}{dz}Ko_{2n+2}(z,-q) =$$
$$= (-1)^{n}\frac{\dfrac{\partial se_{2n+2}(0,|q|)}{\partial z}\dfrac{\partial se_{2n+2}(\pi/2,|q|)}{\partial z}}{|q|\left(B_2^{(2n+2)}\right)^2}\sum_{l=0}^{l=\infty}B_{2l+2}^{(2n+2)}(4l+4)\left\{\begin{array}{l}I_l(\sqrt{|q|}e^{-z})K_l(\sqrt{|q|}e^{z})+Cosh(2z)I_{l+1}(\sqrt{|q|}e^{-z})K_{l+1}(\sqrt{|q|}e^{z})\\+\dfrac{(l+1)}{\sqrt{|q|}}\left(e^{-z}I_l(\sqrt{|q|}e^{-z})K_{l+1}(\sqrt{|q|}e^{z})-e^{z}I_{l+1}(\sqrt{|q|}e^{-z})K_l(\sqrt{|q|}e^{z})\right)\end{array}\right\}$$

.

***<u>Dérivées des fonctions modifiées de Mathieu de première espèce (partie radiale), cas q<0 :</u>***

*A partir des formules :*

$$Ie_{2n}(z,-q) = (-1)^{n}\frac{ce_{2n}(0,|q|)ce_{2n}(\pi/2,|q|)}{\left(A_0^{(2n)}\right)^2}\sum_{l=0}^{l=\infty}(-1)^l A_{2l}^{(2n)}I_l(\sqrt{|q|}e^{-z})I_l(\sqrt{|q|}e^{z})$$

$$Ie_{2n+1}(z,-q) = (-1)^{n}\frac{se_{2n+1}(\pi/2,|q|)\dfrac{\partial se_{2n+1}(0,|q|)}{\partial z}}{\sqrt{|q|}\left(B_1^{(2n+1)}\right)^2}\sum_{l=0}^{l=\infty}(-1)^l B_{2l+1}^{(2n+1)}\left(I_l(\sqrt{|q|}e^{-z})I_{l+1}(\sqrt{|q|}e^{z})+I_{l+1}(\sqrt{|q|}e^{-z})I_l(\sqrt{|q|}e^{z})\right)$$

$$Io_{2n+1}(z,-q) = (-1)^{n}\frac{ce_{2n+1}(0,|q|)\dfrac{\partial ce_{2n+1}(\pi/2,|q|)}{\partial z}}{\sqrt{|q|}\left(A_1^{(2n+1)}\right)^2}\sum_{l=0}^{l=\infty}(-1)^l A_{2l+1}^{(2n+1)}\left(I_l(\sqrt{|q|}e^{-z})I_{l+1}(\sqrt{|q|}e^{z})-I_{l+1}(\sqrt{|q|}e^{-z})I_l(\sqrt{|q|}e^{z})\right)$$

$$Io_{2n+2}(z,-q) = (-1)^{n+1}\frac{\dfrac{\partial se_{2n+2}(0,|q|)}{\partial z}\dfrac{\partial se_{2n+2}(\pi/2,|q|)}{\partial z}}{|q|\left(B_2^{(2n+2)}\right)^2}\sum_{l=0}^{l=\infty}(-1)^l B_{2l+2}^{(2n+2)}\left(I_l(\sqrt{|q|}e^{-z})I_{l+2}(\sqrt{|q|}e^{z})-I_{l+2}(\sqrt{|q|}e^{-z})I_l(\sqrt{|q|}e^{z})\right)$$

*et en dérivant terme à terme, on obtient :*

$$\frac{d}{dz}Ie_{2n}(z,-q)=(-1)^n\frac{ce_{2n}(0,|q|)ce_{2n}(\pi/2,|q|)}{\left(A_0^{(2n)}\right)^2}\sum_{l=0}^{l=\infty}(-1)^l A_{2l}^{(2n)}\left(\sqrt{|q|}e^{z}I_{l-1}(\sqrt{|q|}e^{z})I_l(\sqrt{|q|}e^{-z})-\sqrt{|q|}e^{-z}I_{l-1}(\sqrt{|q|}e^{-z})I_l(\sqrt{|q|}e^{z})\right)$$

$$\frac{d}{dz}Ie_{2n+1}(z,-q)=$$

$$=(-1)^n\frac{se_{2n+1}(\pi/2,|q|)\frac{\partial se_{2n+1}(0,|q|)}{\partial z}}{\sqrt{|q|}\left(B_1^{(2n+1)}\right)^2}\sum_{l=0}^{l=\infty}(-1)^l B_{2l+1}^{(2n+1)}\begin{pmatrix}2\sqrt{|q|}Sinh(z)\left(I_l(\sqrt{|q|}e^{-z})I_l(\sqrt{|q|}e^{z})+I_{l+1}(\sqrt{|q|}e^{-z})I_{l+1}(\sqrt{|q|}e^{z})\right)+\\+(2l+1)\left(I_{l+1}(\sqrt{|q|}e^{-z})I_l(\sqrt{|q|}e^{z})-I_l(\sqrt{|q|}e^{-z})I_{l+1}(\sqrt{|q|}e^{z})\right)\end{pmatrix}$$

$$\frac{d}{dz}Io_{2n+1}(z,-q)=$$

$$=(-1)^n\frac{ce_{2n+1}(0,|q|)\frac{\partial ce_{2n+1}(\pi/2,|q|)}{\partial z}}{\sqrt{|q|}\left(A_1^{(2n+1)}\right)^2}\sum_{l=0}^{l=\infty}(-1)^l A_{2l+1}^{(2n+1)}\begin{pmatrix}2\sqrt{|q|}Cosh(z)\left(I_l(\sqrt{|q|}e^{-z})I_l(\sqrt{q}e^{z})-I_{l+1}(\sqrt{|q|}e^{-z})I_{l+1}(\sqrt{|q|}e^{z})\right)+\\-(2l+1)\left(I_l(\sqrt{|q|}e^{-z})I_{l+1}(\sqrt{|q|}e^{z})+I_l(\sqrt{|q|}e^{z})I_{l+1}(\sqrt{|q|}e^{-z})\right)\end{pmatrix}$$

$$\frac{d}{dz}Io_{2n+2}(z,-q)=$$

$$=(-1)^{n+1}\frac{\frac{\partial se_{2n+2}(0,|q|)}{\partial z}\frac{\partial se_{2n+2}(\pi/2,|q|)}{\partial z}}{|q|\left(B_2^{(2n+2)}\right)^2}\sum_{l=0}^{l=\infty}\begin{pmatrix}(-1)^l B_{2l+2}^{(2n+2)}(4l+4)\times\\\times\begin{pmatrix}Cosh(2z)I_{l+1}(\sqrt{|q|}e^{-z})I_{l+1}(\sqrt{|q|}e^{z})-I_l(\sqrt{|q|}e^{-z})I_l(\sqrt{|q|}e^{z})\\+\frac{l+1}{\sqrt{|q|}}\left(e^{-z}I_l(\sqrt{|q|}e^{-z})I_{l+1}(\sqrt{|q|}e^{z})+e^{z}I_{l+1}(\sqrt{|q|}e^{-z})I_l(\sqrt{|q|}e^{z})\right)\end{pmatrix}\end{pmatrix}$$

*Formules équivalentes de NIST « Handbook of Mathematical Functions, Mathieu and Hill's Equation », développement en fonction de Bessel et en produit de fonctions de Bessel*

*Les développements en produit de fonctions de Bessel, sont les expressions les plus pratiques pour les diverses fonctions radiales, car ils convergent rapidement avec un nombre de terme limité. L'ouvrage NIST « Handbook of Mathematical Functios, Mathieu and Hill's Equation » ainsi que la section de M.Abramovitz et I.A.Stegun «Handbook of Mathematical Functions », Chapitre 20 dédié aux fonctions de Mathieu, introduisent les fonctions radiales de Mathieu Mc et Ms, à partir desquelles on définit les fonctions radiales Je, Jo, Ne, No moyennant un coefficient de proportionnalité. Les formules reportées dans M.Abramovitz et I.A.Stegun sont alors les mêmes que pour J.C.Gutierrez :*

$$Je_{2n}(z,q)=(-1)^n\frac{ce_{2n}(0,q)ce_{2n}(\pi/2,q)}{A_0^{(2n)}}Mc_{2n}^{(1)}(z,q)\quad Je_{2n+1}(z,q)=(-1)^{n+1}\frac{ce_{2n+1}(0,q)\frac{\partial ce_{2n+1}(\pi/2,q)}{\partial z}}{\sqrt{q}A_1^{(2n+1)}}Mc_{2n+1}^{(1)}(z,q)$$

$$Jo_{2n+1}(z,q)=(-1)^n\frac{\frac{\partial se_{2n+1}(0,q)}{\partial z}se_{2n+1}(\pi/2,q)}{\sqrt{q}B_1^{(2n+1)}}Ms_{2n+1}^{(1)}(z,q)\quad Jo_{2n+2}(z,q)=(-1)^{n+1}\frac{\frac{\partial se_{2n+2}(0,q)}{\partial z}\frac{\partial se_{2n+2}(\pi/2,q)}{\partial z}}{qB_2^{(2n+2)}}Ms_{2n+2}^{(1)}(z,q)$$

$$Ne_{2n}(z,q)=(-1)^n\frac{ce_{2n}(0,q)ce_{2n}(\pi/2,q)}{A_0^{(2n)}}Mc_{2n}^{(2)}(z,q)\quad Ne_{2n+1}(z,q)=(-1)^{n+1}\frac{ce_{2n+1}(0,q)\frac{\partial ce_{2n+1}(\pi/2,q)}{\partial z}}{\sqrt{q}A_1^{(2n+1)}}Mc_{2n+1}^{(2)}(z,q)$$

$$No_{2n+1}(z,q)=(-1)^n\frac{\frac{\partial se_{2n+1}(0,q)}{\partial z}se_{2n+1}(\pi/2,q)}{\sqrt{q}B_1^{(2n+1)}}Ms_{2n+1}^{(2)}(z,q)\quad No_{2n+2}(z,q)=(-1)^{n+1}\frac{\frac{\partial se_{2n+2}(0,q)}{\partial z}\frac{\partial se_{2n+2}(\pi/2,q)}{\partial z}}{qB_2^{(2n+2)}}Ms_{2n+2}^{(2)}(z,q)$$

.

*Voici les formules des 4 types de fonctions radiales Mc et Ms, à l'instar des quatre types de fonction de Bessel J, Y (ou N), H1 et H2 ( ici dans le développement en produit de fonctions de Bessel, l'indice s peut-être choisi quelconque pour le coefficient de Fourier, la valeur optimale pour la convergence correspondant à la valeur maximum du coefficient de Fourier) :*

$$j=1,2,3,4 \quad C_\nu^{(1)}(x)=J_\nu(x) \quad C_\nu^{(2)}(x)=Y_\nu(x)=N_\nu(x) \quad C_\nu^{(3)}(x)=H_\nu^{(1)}(x)=J_\nu(x)+iY_\nu(x) \quad C_\nu^{(4)}(x)=H_\nu^{(2)}(x)=J_\nu(x)-iY_\nu(x)$$

$$Mc_{2n}^{(j)}(z,q)=\frac{(-1)^n}{ce_{2n}(0,q)}\sum_{l=0}^{l=\infty}(-1)^l A_{2l}^{(2n)} C_{2l}^{(j)}\left(2\sqrt{q}Cosh(z)\right)=\frac{(-1)^n}{ce_{2n}(\pi/2,q)}\sum_{l=0}^{l=\infty} A_{2l}^{(2n)} C_{2l}^{(j)}\left(2\sqrt{q}Sinh(z)\right)$$

$$s/Max\left(\left|A_{2l}^{(2n)}\right|, l\geq 0\right) \quad \begin{cases}\varepsilon_s=2 & si\ s=0\\ \varepsilon_s=1 & si\ s\neq 0\end{cases} \quad Mc_{2n}^{(j)}(z,q)=\frac{(-1)^n}{\varepsilon_s A_{2s}^{(2n)}}\sum_{l=0}^{l=\infty}(-1)^l A_{2l}^{(2n)}\left\{J_{l-s}\left(\sqrt{q}e^{-z}\right)C_{l+s}^{(j)}\left(\sqrt{q}e^{z}\right)+J_{l+s}\left(\sqrt{q}e^{-z}\right)C_{l-s}^{(j)}\left(\sqrt{q}e^{z}\right)\right\}$$

$$Mc_{2n+1}^{(j)}(z,q)=\frac{(-1)^n}{ce_{2n+1}(0,q)}\sum_{l=0}^{l=\infty}(-1)^l A_{2l+1}^{(2n+1)} C_{2l+1}^{(j)}\left(2\sqrt{q}Cosh(z)\right) \quad Mc_{2n+1}^{(j)}(z,q)=\frac{(-1)^{n+1}Coth(z)}{\frac{\partial ce_{2n+1}(\pi/2,q)}{\partial z}}\sum_{l=0}^{l=\infty}(2l+1)A_{2l+1}^{(2n+1)} C_{2l+1}^{(j)}\left(2\sqrt{q}Sinh(z)\right)$$

$$s/Max\left(\left|A_{2l}^{(2n)}\right|, l\geq 0\right) \quad Mc_{2n+1}^{(j)}(z,q)=\frac{(-1)^n}{A_{2s+1}^{(2n+1)}}\sum_{l=0}^{l=\infty}(-1)^l A_{2l+1}^{(2n+1)}\left(J_{l-s}\left(\sqrt{q}e^{-z}\right)C_{l+s+1}^{(j)}\left(\sqrt{q}e^{z}\right)+J_{l+s+1}\left(\sqrt{q}e^{-z}\right)C_{l-s}^{(j)}\left(\sqrt{q}e^{z}\right)\right)$$

$$Ms_{2n+1}^{(j)}(z,q)=\frac{(-1)^n Tanh(z)}{\frac{\partial se_{2n+1}(0,q)}{\partial z}}\sum_{l=0}^{l=\infty}(-1)^l(2l+1)B_{2l+1}^{(2n+1)} C_{2l+1}^{(j)}\left(2\sqrt{q}Cosh(z)\right) \quad Ms_{2n+1}^{(j)}(z,q)=\frac{(-1)^n}{se_{2n+1}(\pi/2,q)}\sum_{l=0}^{l=\infty} B_{2l+1}^{(2n+1)} C_{2l+1}^{(j)}\left(2\sqrt{q}Sinh(z)\right)$$

$$s/Max\left(\left|A_{2l}^{(2n)}\right|, l\geq 0\right) \quad Ms_{2n+1}^{(j)}(z,q)=\frac{(-1)^n}{B_{2s+1}^{(2n+1)}}\sum_{l=0}^{l=\infty}(-1)^l B_{2l+1}^{(2n+1)}\left(J_{l-s}\left(\sqrt{q}e^{-z}\right)C_{l+s+1}^{(j)}\left(\sqrt{q}e^{z}\right)-J_{l+s+1}\left(\sqrt{q}e^{-z}\right)C_{l-s}^{(j)}\left(\sqrt{q}e^{z}\right)\right)$$

$$Ms_{2n+2}^{(j)}(z,q)=\frac{(-1)^n Tanh(z)}{\frac{\partial se_{2n+2}(0,q)}{\partial z}}\sum_{l=0}^{l=\infty}(-1)^l(2l+2)B_{2l+2}^{(2n+2)} C_{2l+2}^{(j)}\left(2\sqrt{q}Cosh(z)\right) \quad Ms_{2n+2}^{(j)}(z,q)=\frac{(-1)^{n+1}Coth(z)}{\frac{\partial se_{2n+2}(\pi/2,q)}{\partial z}}\sum_{l=0}^{l=\infty}(2l+2)B_{2l+2}^{(2n+2)} C_{2l+2}^{(j)}\left(2\sqrt{q}Sinh(z)\right)$$

$$s/Max\left(\left|A_{2l}^{(2n)}\right|, l\geq 0\right) \quad Ms_{2n+2}^{(j)}(z,q)=\frac{(-1)^n}{B_{2s+2}^{(2n+2)}}\sum_{l=0}^{l=\infty}(-1)^l B_{2l+2}^{(2n+2)}\left(J_{l-s}\left(\sqrt{q}e^{-z}\right)C_{l+s+2}^{(j)}\left(\sqrt{q}e^{z}\right)-J_{l+s+2}\left(\sqrt{q}e^{-z}\right)C_{l-s}^{(j)}\left(\sqrt{q}e^{z}\right)\right)$$

*Par extension pour les fonctions radiales Ie, Io, Ke et Ko, en substituant les fonctions de Bessel I et K et en unifiant les expressions telles que données dans M.Abramovitz I.A.Stegun ou le NIST Handbook « Mathieu and Hill's equation », il vient :*

$$j=1,2 \quad S_\nu^{(1)}(x)=I_\nu(x) \quad S_\nu^{(2)}(x)=K_\nu(x) \quad \begin{cases}\varepsilon_s=2 & si\ s=0\\ \varepsilon_s=1 & si\ s\neq 0\end{cases}$$

$$\widetilde{M}c_{2n}^{(j)}(z,-q)=\frac{1}{ce_{2n}(\pi/2,|q|)}\sum_{l=0}^{l=\infty}(-1)^l A_{2l}^{(2n)} S_{2l}^{(j)}\left(2\sqrt{|q|}Cosh(z)\right) \quad \widetilde{M}c_{2n}^{(j)}(z,-q)=\frac{1}{ce_{2n}(0,|q|)}\sum_{l=0}^{l=\infty}A_{2l}^{(2n)} S_{2l}^{(j)}\left(2\sqrt{|q|}Sinh(z)\right)$$

$$s/Max\left(\left|A_{2l}^{(2n)}\right|, l\geq 0\right) \quad \widetilde{M}c_{2n}^{(j)}(z,-q)=\frac{1}{\varepsilon_s A_{2s}^{(2n)}}\sum_{l=0}^{l=\infty}(-1)^{j(l+s+j-1)}A_{2l}^{(2n)}\left\{I_{l-s}\left(\sqrt{|q|}e^{-z}\right)S_{l+s}^{(j)}\left(\sqrt{|q|}e^{z}\right)+I_{l+s}\left(\sqrt{|q|}e^{-z}\right)S_{l-s}^{(j)}\left(\sqrt{|q|}e^{z}\right)\right\}$$

$$\widetilde{M}c_{2n+1}^{(j)}(z,-q)=\frac{1}{se_{2n+1}(\pi/2,|q|)}\sum_{l=0}^{l=\infty}(-1)^l B_{2l+1}^{(2n+1)} S_{2l+1}^{(j)}\left(2\sqrt{|q|}Cosh(z)\right) \quad \widetilde{M}c_{2n+1}^{(j)}(z,-q)=\frac{(-1)^{n(j-1)}Coth(z)}{\frac{\partial se_{2n+1}(0,|q|)}{\partial z}}\sum_{l=0}^{l=\infty}(2l+1)B_{2l+1}^{(2n+1)} S_{2l+1}^{(j)}\left(2\sqrt{|q|}Sinh(z)\right)$$

$$s/Max\left(\left|A_{2l}^{(2n)}\right|, l\geq 0\right) \quad \widetilde{M}c_{2n+1}^{(j)}(z,-q)=\frac{1}{B_{2s+1}^{(2n+1)}}\sum_{l=0}^{l=\infty}(-1)^{j(l+s+j-1)}B_{2l+1}^{(2n+1)}\left(I_{l-s}\left(\sqrt{|q|}e^{-z}\right)S_{l+s+1}^{(j)}\left(\sqrt{|q|}e^{z}\right)+(-1)^{j-1}I_{l+s+1}\left(\sqrt{|q|}e^{-z}\right)S_{l-s}^{(j)}\left(\sqrt{|q|}e^{z}\right)\right)$$

$$\widetilde{M}s_{2n+1}^{(j)}(z,-q)=-\frac{Tanh(z)}{\frac{\partial ce_{2n+1}(\pi/2,|q|)}{\partial z}}\sum_{l=0}^{l=\infty}(-1)^l(2l+1)A_{2l+1}^{(2n+1)} S_{2l+1}^{(j)}\left(2\sqrt{|q|}Cosh(z)\right) \quad \widetilde{M}s_{2n+1}^{(j)}(z,-q)=\frac{1}{ce_{2n+1}(0,|q|)}\sum_{l=0}^{l=\infty}A_{2l+1}^{(2n+1)} S_{2l+1}^{(j)}\left(2\sqrt{|q|}Sinh(z)\right)$$

$$s/Max\left(\left|A_{2l}^{(2n)}\right|, l\geq 0\right) \quad \widetilde{M}s_{2n+1}^{(j)}(z,-q)=\frac{1}{A_{2s+1}^{(2n+1)}}\sum_{l=0}^{l=\infty}(-1)^{j(l+s+j)}A_{2l+1}^{(2n+1)}\left(I_{l-s}\left(\sqrt{|q|}e^{-z}\right)S_{l+s+1}^{(j)}\left(\sqrt{|q|}e^{z}\right)+(-1)^{j-1}I_{l+s+1}\left(\sqrt{|q|}e^{-z}\right)S_{l-s}^{(j)}\left(\sqrt{|q|}e^{z}\right)\right)$$

$$\widetilde{M}s_{2n+2}^{(j)}(z,-q)=\frac{Tanh(z)}{\frac{\partial se_{2n+2}(\pi/2,|q|)}{\partial z}}\sum_{l=0}^{l=\infty}(-1)^l(2l+2)B_{2l+2}^{(2n+2)} S_{2l+2}^{(j)}\left(2\sqrt{|q|}Cosh(z)\right) \quad \widetilde{M}s_{2n+2}^{(j)}(z,-q)=-\frac{Coth(z)}{\frac{\partial se_{2n+2}(0,|q|)}{\partial z}}\sum_{l=0}^{l=\infty}(2l+2)B_{2l+2}^{(2n+2)} S_{2l+2}^{(j)}\left(2\sqrt{|q|}Sinh(z)\right)$$

$$s/Max\left(\left|A_{2l}^{(2n)}\right|, l\geq 0\right) \quad \widetilde{M}s_{2n+2}^{(j)}(z,-q)=\frac{1}{B_{2s+2}^{(2n+2)}}\sum_{l=0}^{l=\infty}(-1)^{j(l+s+j-1)}B_{2l+2}^{(2n+2)}\left(I_{l-s}\left(\sqrt{|q|}e^{-z}\right)S_{l+s+2}^{(j)}\left(\sqrt{|q|}e^{z}\right)-I_{l+s+2}\left(\sqrt{|q|}e^{-z}\right)S_{l-s}^{(j)}\left(\sqrt{|q|}e^{z}\right)\right)$$

*Comme toujours l'indice s est choisi quelconque pour le coefficient de Fourier, la valeur optimale pour la convergence correspondant à la valeur maximum du coefficient de Fourier. En prenant maintenant s=0, il vient :*

$$j=1,2 \quad S_\nu^{(1)}(x)=I_\nu(x) \quad S_\nu^{(2)}(x)=K_\nu(x)$$

$$\widetilde{M}c_{2n}^{(j)}(z,-q)=\frac{1}{A_0^{(2n)}}\sum_{l=0}^{l=\infty}(-1)^{j(l+j-1)}A_{2l}^{(2n)}\left\{I_l\left(\sqrt{|q|}e^{-z}\right)S_l^{(j)}\left(\sqrt{|q|}e^{z}\right)\right\}$$

$$\widetilde{M}c_{2n+1}^{(j)}(z,-q)=\frac{1}{B_1^{(2n+1)}}\sum_{l=0}^{l=\infty}(-1)^{j(l+j-1)}B_{2l+1}^{(2n+1)}\left(I_l\left(\sqrt{|q|}e^{-z}\right)S_{l+1}^{(j)}\left(\sqrt{|q|}e^{z}\right)+(-1)^{j-1}I_{l+1}\left(\sqrt{|q|}e^{-z}\right)S_l^{(j)}\left(\sqrt{|q|}e^{z}\right)\right)$$

$$\widetilde{M}s_{2n+1}^{(j)}(z,-q)=\frac{1}{A_1^{(2n+1)}}\sum_{l=0}^{l=\infty}(-1)^{j(l+j-1)}A_{2l+1}^{(2n+1)}\left(I_l\left(\sqrt{|q|}e^{-z}\right)S_{l+1}^{(j)}\left(\sqrt{|q|}e^{z}\right)+(-1)^{j-1}I_{l+1}\left(\sqrt{|q|}e^{-z}\right)S_l^{(j)}\left(\sqrt{|q|}e^{z}\right)\right)$$

$$\widetilde{M}s_{2n+2}^{(j)}(z,-q)=\frac{1}{B_2^{(2n+2)}}\sum_{l=0}^{l=\infty}(-1)^{j(l+j-1)}B_{2l+2}^{(2n+2)}\left(I_l\left(\sqrt{|q|}e^{-z}\right)S_{l+2}^{(j)}\left(\sqrt{|q|}e^{z}\right)-I_{l+2}\left(\sqrt{|q|}e^{-z}\right)S_l^{(j)}\left(\sqrt{|q|}e^{z}\right)\right)$$

*Et l'on retrouve les formules de J.C.Guttierez, avec les coefficients de proportionnalité suivant :*

$$\begin{cases} Ie_{2n}(z,-q) = (-1)^n \dfrac{ce_{2n}(0,|q|)ce_{2n}(\pi/2,|q|)}{A_0^{(2n)}} \widetilde{M}c_{2n}^{(1)}(z,-q) \quad Ie_{2n+1}(z,q) = (-1)^n \dfrac{\dfrac{\partial se_{2n+1}(0,|q|)}{\partial z} se_{2n+1}(\pi/2,|q|)}{\sqrt{q}B_1^{(2n+1)}} \widetilde{M}c_{2n+1}^{(1)}(z,-q) \\ Io_{2n+1}(z,-q) = (-1)^{n+1} \dfrac{ce_{2n+1}(0,|q|)\dfrac{\partial ce_{2n+1}(\pi/2,|q|)}{\partial z}}{\sqrt{q}A_1^{(2n+1)}} \widetilde{M}s_{2n+1}^{(1)}(z,-q) \quad Io_{2n+2}(z,-q) = (-1)^{n+1} \dfrac{\dfrac{\partial se_{2n+2}(0,|q|)}{\partial z}\dfrac{\partial se_{2n+2}(\pi/2,|q|)}{\partial z}}{qB_2^{(2n+2)}} \widetilde{M}s_{2n+2}^{(1)}(z,-q) \\ Ke_{2n}(z,-q) = (-1)^n \dfrac{ce_{2n}(0,|q|)ce_{2n}(\pi/2,|q|)}{\pi A_0^{(2n)}} \widetilde{M}c_{2n}^{(2)}(z,-q) \quad Ke_{2n+1}(z,-q) = (-1)^n \dfrac{\dfrac{\partial se_{2n+1}(0,|q|)}{\partial z} se_{2n+1}(\pi/2,|q|)}{\pi\sqrt{q}B_1^{(2n+1)}} \widetilde{M}c_{2n+1}^{(2)}(z,-q) \\ Ko_{2n+1}(z,-q) = (-1)^{n+1} \dfrac{ce_{2n+1}(0,|q|)\dfrac{\partial ce_{2n+1}(\pi/2,|q|)}{\partial z}}{\pi\sqrt{q}A_1^{(2n+1)}} \widetilde{M}s_{2n+1}^{(2)}(z,-q) \quad Ko_{2n+2}(z,-q) = (-1)^{n+1} \dfrac{\dfrac{\partial se_{2n+2}(0,|q|)}{\partial z}\dfrac{\partial se_{2n+2}(\pi/2,|q|)}{\partial z}}{\pi qB_2^{(2n+2)}} \widetilde{M}s_{2n+2}^{(2)}(z,-q) \end{cases}$$

*Posons* $\begin{cases} p_{2n} = ce_{2n}(0,|q|)ce_{2n}(\pi/2,|q|) \quad p_{2n+1} = ce_{2n+1}(0,|q|)\dfrac{\partial ce_{2n+1}(\pi/2,|q|)}{\partial z} \\ s_{2n+1} = \dfrac{\partial se_{2n+1}(0,|q|)}{\partial z} se_{2n+1}(\pi/2,|q|) \quad s_{2n+2} = \dfrac{\partial se_{2n+2}(0,|q|)}{\partial z}\dfrac{\partial se_{2n+2}(\pi/2,|q|)}{\partial z} \end{cases}$

$$\begin{cases} Ie_{2n}(z,-q) = (-1)^n \dfrac{p_{2n}}{A_0^{(2n)}} \widetilde{M}c_{2n}^{(1)}(z,-q) \quad Ie_{2n+1}(z,-q) = (-1)^n \dfrac{s_{2n+1}}{\sqrt{q}B_1^{(2n+1)}} \widetilde{M}c_{2n+1}^{(1)}(z,-q) \\ Io_{2n+1}(z,-q) = (-1)^{n+1} \dfrac{p_{2n+1}}{\sqrt{q}A_1^{(2n+1)}} \widetilde{M}s_{2n+1}^{(1)}(z,-q) \quad Io_{2n+2}(z,-q) = (-1)^{n+1} \dfrac{s_{2n+2}}{qB_2^{(2n+2)}} \widetilde{M}s_{2n+2}^{(1)}(z,-q) \\ Ke_{2n}(z,-q) = (-1)^n \dfrac{p_{2n}}{\pi A_0^{(2n)}} \widetilde{M}c_{2n}^{(2)}(z,-q) \quad Ke_{2n+1}(z,-q) = (-1)^n \dfrac{s_{2n+1}}{\pi\sqrt{q}B_1^{(2n+1)}} \widetilde{M}c_{2n+1}^{(2)}(z,-q) \\ Ko_{2n+1}(z,-q) = (-1)^{n+1} \dfrac{p_{2n+1}}{\pi\sqrt{q}A_1^{(2n+1)}} \widetilde{M}s_{2n+1}^{(2)}(z,-q) \quad Ko_{2n+2}(z,-q) = (-1)^{n+1} \dfrac{s_{2n+2}}{\pi qB_2^{(2n+2)}} \widetilde{M}s_{2n+2}^{(2)}(z,-q) \end{cases}$$

.

*Bien évidemment pour retrouver les formules de J.C.Guttierrez, il vient :*

$$Je_{2n}'(z,q)=(-1)^n\frac{ce_{2n}(0,q)ce_{2n}(\pi/2,q)}{A_0^{(2n)}}Mc_{2n}^{(1)}'(z,q)\quad Je_{2n+1}'(z,q)=(-1)^{n+1}\frac{ce_{2n+1}(0,q)\frac{\partial ce_{2n+1}(\pi/2,q)}{\partial z}}{\sqrt{q}A_1^{(2n+1)}}Mc_{2n+1}^{(1)}'(z,q)$$

$$Jo_{2n+1}'(z,q)=(-1)^n\frac{\frac{\partial se_{2n+1}(0,q)}{\partial z}se_{2n+1}(\pi/2,q)}{\sqrt{q}B_1^{(2n+1)}}Ms_{2n+1}^{(1)}'(z,q)\quad Jo_{2n+2}'(z,q)=(-1)^{n+1}\frac{\frac{\partial se_{2n+2}(0,q)}{\partial z}\frac{\partial se_{2n+2}(\pi/2,q)}{\partial z}}{qB_2^{(2n+2)}}Ms_{2n+2}^{(1)}'(z,q)$$

$$Ne_{2n}'(z,q)=(-1)^n\frac{ce_{2n}(0,q)ce_{2n}(\pi/2,q)}{A_0^{(2n)}}Mc_{2n}^{(2)}'(z,q)\quad Ne_{2n+1}'(z,q)=(-1)^{n+1}\frac{ce_{2n+1}(0,q)\frac{\partial ce_{2n+1}(\pi/2,q)}{\partial z}}{\sqrt{q}A_1^{(2n+1)}}Mc_{2n+1}^{(2)}'(z,q)$$

$$No_{2n+1}'(z,q)=(-1)^n\frac{\frac{\partial se_{2n+1}(0,q)}{\partial z}se_{2n+1}(\pi/2,q)}{\sqrt{q}B_1^{(2n+1)}}Ms_{2n+1}^{(2)}'(z,q)\quad No_{2n+2}'(z,q)=(-1)^{n+1}\frac{\frac{\partial se_{2n+2}(0,q)}{\partial z}\frac{\partial se_{2n+2}(\pi/2,q)}{\partial z}}{qB_2^{(2n+2)}}Ms_{2n+2}^{(2)}'(z,q)$$

*Les dérivées premières des fonctions Mc et Ms s'écrivent :*

$$j=1,2,3,4\quad C_\nu^{(1)}(x)=J_\nu(x)\quad C_\nu^{(2)}(x)=Y_\nu(x)=N_\nu(x)\quad C_\nu^{(3)}(x)=H_\nu^{(1)}(x)=J_\nu(x)+iY_\nu(x)\quad C_\nu^{(4)}(x)=H_\nu^{(2)}(x)=J_\nu(x)-iY_\nu(x)$$

$$Mc_{2n}^{(j)}'(z,q)=\frac{(-1)^n\sqrt{q}Sinh(z)}{ce_{2n}(0,q)}\sum_{l=0}^{l=\infty}(-1)^l A_{2l}^{(2n)}\left\{C_{2l-1}^{(j)}\left(2\sqrt{q}Cosh(z)\right)-C_{2l+1}^{(j)}\left(2\sqrt{q}Cosh(z)\right)\right\}$$

$$Mc_{2n}^{(j)}'(z,q)=\frac{(-1)^n\sqrt{q}Cosh(z)}{ce_{2n}(\pi/2,q)}\sum_{l=0}^{l=\infty}A_{2l}^{(2n)}\left\{C_{2l-1}^{(j)}\left(2\sqrt{q}Sinh(z)\right)-C_{2l+1}^{(j)}\left(2\sqrt{q}Sinh(z)\right)\right\}$$

$$Mc_{2n+1}^{(j)}'(z,q)=\frac{(-1)^n\sqrt{q}Sinh(z)}{ce_{2n+1}(0,q)}\sum_{l=0}^{l=\infty}(-1)^l A_{2l+1}^{(2n+1)}\left\{C_{2l}^{(j)}\left(2\sqrt{q}Cosh(z)\right)-C_{2l+2}^{(j)}\left(2\sqrt{q}Cosh(z)\right)\right\}$$

$$Mc_{2n+1}^{(j)}'(z,q)=\frac{(-1)^{n+1}\sqrt{q}}{\frac{\partial ce_{2n+1}(\pi/2,q)}{\partial z}Sinh(z)}\sum_{l=0}^{l=\infty}A_{2l+1}^{(2n+1)}\left\{\left((2l+1)Cosh^2(z)-1\right)C_{2l}^{(j)}\left(2\sqrt{q}Sinh(z)\right)-\left((2l+1)Cosh^2(z)+1\right)C_{2l+2}^{(j)}\left(2\sqrt{q}Sinh(z)\right)\right\}$$

$$Ms_{2n+1}^{(j)}'(z,q)=\frac{(-1)^n\sqrt{q}}{\frac{\partial se_{2n+1}(0,q)}{\partial z}Cosh(z)}\sum_{l=0}^{l=\infty}(-1)^l B_{2l+1}^{(2n+1)}\left\{\left\{(2l+1)Sinh^2(z)+1\right\}C_{2l}^{(j)}\left(2\sqrt{q}Cosh(z)\right)+\left\{1-(2l+1)Sinh^2(z)\right\}C_{2l+2}^{(j)}\left(2\sqrt{q}Cosh(z)\right)\right\}$$

$$Ms_{2n+1}^{(j)}'(z,q)=\frac{(-1)^n\sqrt{q}Cosh(z)}{se_{2n+1}(\pi/2,q)}\sum_{l=0}^{l=\infty}B_{2l+1}^{(2n+1)}\left\{C_{2l}^{(j)}\left(2\sqrt{q}Sinh(z)\right)-C_{2l+2}^{(j)}\left(2\sqrt{q}Sinh(z)\right)\right\}$$

$$Ms_{2n+2}^{(j)}'(z,q)=\frac{(-1)^n\sqrt{q}}{\frac{\partial se_{2n+2}(0,q)}{\partial z}Cosh(z)}\sum_{l=0}^{l=\infty}(-1)^l B_{2l+2}^{(2n+2)}\left\{\left\{1+(2l+2)Sinh^2(z)\right\}C_{2l+1}^{(j)}\left(2\sqrt{q}Cosh(z)\right)+\left\{1-(2l+2)Sinh^2(z)\right\}C_{2l+2}^{(j)}\left(2\sqrt{q}Cosh(z)\right)\right\}$$

$$Ms_{2n+2}^{(j)}'(z,q)=\frac{(-1)^{n+1}\sqrt{q}}{\frac{\partial se_{2n+2}(\pi/2,q)}{\partial z}Sinh(z)}\sum_{l=0}^{l=\infty}B_{2l+2}^{(2n+2)}\left\{\left((2l+2)Cosh^2(z)-1\right)C_{2l+1}^{(j)}\left(2\sqrt{q}Sinh(z)\right)-\left((2l+2)Cosh^2(z)+1\right)C_{2l+3}^{(j)}\left(2\sqrt{q}Sinh(z)\right)\right\}$$

.

*Les séries des dérivées premières en produits de fonctions de Bessel sont les suivantes :*

$$j=1,2,3,4 \quad C_\nu^{(1)}(x)=J_\nu(x) \quad C_\nu^{(2)}(x)=Y_\nu(x)=N_\nu(x) \quad C_\nu^{(3)}(x)=H_\nu^{(1)}(x)=J_\nu(x)+iY_\nu(x) \quad C_\nu^{(4)}(x)=H_\nu^{(2)}(x)=J_\nu(x)-iY_\nu(x)$$

$$\left.\begin{array}{l} s/Max\left(\left|A_{2l}^{(2n)}\right|,\, l\geq 0\right) \\ \begin{cases}\varepsilon_s=2 & si\ s=0\\ \varepsilon_s=1 & si\ s\neq 0\end{cases}\end{array}\right\} \quad Mc_{2n}^{(j)}{}'(z,q)=\frac{(-1)^n\sqrt{q}}{\varepsilon_s A_{2s}^{(2n)}}\sum_{l=0}^{l=\infty}(-1)^l A_{2l}^{(2n)}\left\{\begin{array}{l} -e^{-z}\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{l-s}{\sqrt{q}e^{-z}}J_{l-s}\left(\sqrt{q}e^{-z}\right)-J_{l-s+1}\left(\sqrt{q}e^{-z}\right)\right)C_{l+s}^{(j)}\left(\sqrt{q}e^{z}\right)+\\ +\left(\frac{l+s}{\sqrt{q}e^{-z}}J_{l+s}\left(\sqrt{q}e^{-z}\right)-J_{l+s+1}\left(\sqrt{q}e^{-z}\right)\right)C_{l-s}^{(j)}\left(\sqrt{q}e^{z}\right)\end{array}\right\}+\\ +e^{z}\left\{\begin{array}{l}J_{l-s}\left(\sqrt{q}e^{-z}\right)\left\{\frac{l+s}{\sqrt{q}e^{z}}C_{l+s-1}^{(j)}\left(\sqrt{q}e^{z}\right)-C_{l+s+1}^{(j)}\left(\sqrt{q}e^{z}\right)\right\}+\\ +J_{l+s}\left(\sqrt{q}e^{-z}\right)\left\{\frac{l-s}{\sqrt{q}e^{z}}C_{l-s}^{(j)}\left(\sqrt{q}e^{z}\right)-C_{l-s+1}^{(j)}\left(\sqrt{q}e^{z}\right)\right\}\end{array}\right\}\end{array}\right\}$$

$$s/Max\left(\left|A_{2l}^{(2n)}\right|,\, l\geq 0\right) \quad Mc_{2n+1}^{(j)}{}'(z,q)=\frac{(-1)^n\sqrt{q}}{A_{2s+1}^{(2n+1)}}\sum_{l=0}^{l=\infty}(-1)^l A_{2l+1}^{(2n+1)}\left\{\begin{array}{l} -e^{-z}\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{l-s}{\sqrt{q}e^{-z}}J_{l-s}\left(\sqrt{q}e^{-z}\right)-J_{l-s+1}\left(\sqrt{q}e^{-z}\right)\right)C_{l+s+1}^{(j)}\left(\sqrt{q}e^{z}\right)+\\ +\left(\frac{l+s+1}{\sqrt{q}e^{-z}}J_{l+s+1}\left(\sqrt{q}e^{-z}\right)-J_{l+s+2}\left(\sqrt{q}e^{-z}\right)\right)C_{l-s}^{(j)}\left(\sqrt{q}e^{z}\right)\end{array}\right\}+\\ +e^{z}\left\{\begin{array}{l}J_{l-s}\left(\sqrt{q}e^{-z}\right)\left\{\frac{l+s+1}{\sqrt{q}e^{z}}C_{l+s+1}^{(j)}\left(\sqrt{q}e^{z}\right)-C_{l+s+2}^{(j)}\left(\sqrt{q}e^{z}\right)\right\}+\\ +J_{l+s+1}\left(\sqrt{q}e^{-z}\right)\left\{\frac{l-s}{\sqrt{q}e^{z}}C_{l-s}^{(j)}\left(\sqrt{q}e^{z}\right)-C_{l-s+1}^{(j)}\left(\sqrt{q}e^{z}\right)\right\}\end{array}\right\}\end{array}\right\}$$

$$s/Max\left(\left|A_{2l}^{(2n)}\right|,\, l\geq 0\right) \quad Ms_{2n+1}^{(j)}{}'(z,q)=\frac{(-1)^n\sqrt{q}}{B_{2s+1}^{(2n+1)}}\sum_{l=0}^{l=\infty}(-1)^l B_{2l+1}^{(2n+1)}\left\{\begin{array}{l} -e^{-z}\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{l-s}{\sqrt{q}e^{-z}}J_{l-s}\left(\sqrt{q}e^{-z}\right)-J_{l-s+1}\left(\sqrt{q}e^{-z}\right)\right)C_{l+s+1}^{(j)}\left(\sqrt{q}e^{z}\right)-\\ -\left(\frac{l+s+1}{\sqrt{q}e^{-z}}J_{l+s+1}\left(\sqrt{q}e^{-z}\right)-J_{l+s+2}\left(\sqrt{q}e^{-z}\right)\right)C_{l-s}^{(j)}\left(\sqrt{q}e^{z}\right)\end{array}\right\}+\\ +e^{z}\left\{\begin{array}{l}J_{l-s}\left(\sqrt{q}e^{-z}\right)\left\{\frac{l+s+1}{\sqrt{q}e^{z}}C_{l+s+1}^{(j)}\left(\sqrt{q}e^{z}\right)-C_{l+s+2}^{(j)}\left(\sqrt{q}e^{z}\right)\right\}-\\ -J_{l+s+1}\left(\sqrt{q}e^{-z}\right)\left\{\frac{l-s}{\sqrt{q}e^{z}}C_{l-s}^{(j)}\left(\sqrt{q}e^{z}\right)-C_{l-s+1}^{(j)}\left(\sqrt{q}e^{z}\right)\right\}\end{array}\right\}\end{array}\right\}$$

$$s/Max\left(\left|A_{2l}^{(2n)}\right|,\, l\geq 0\right) \quad Ms_{2n+2}^{(j)}{}'(z,q)=\frac{(-1)^n\sqrt{q}}{B_{2s+2}^{(2n+2)}}\sum_{l=0}^{l=\infty}(-1)^l B_{2l+2}^{(2n+2)}\left\{\begin{array}{l} -e^{-z}\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{l-s}{\sqrt{q}e^{-z}}J_{l-s}\left(\sqrt{q}e^{-z}\right)-J_{l-s+1}\left(\sqrt{q}e^{-z}\right)\right)C_{l+s+2}^{(j)}\left(\sqrt{q}e^{z}\right)-\\ -\left(\frac{l+s+2}{\sqrt{q}e^{-z}}J_{l+s+2}\left(\sqrt{q}e^{-z}\right)-J_{l+s+3}\left(\sqrt{q}e^{-z}\right)\right)C_{l-s}^{(j)}\left(\sqrt{q}e^{z}\right)\end{array}\right\}+\\ +e^{z}\left\{\begin{array}{l}J_{l-s}\left(\sqrt{q}e^{-z}\right)\left\{\frac{l+s+2}{\sqrt{q}e^{z}}C_{l+s+2}^{(j)}\left(\sqrt{q}e^{z}\right)-C_{l+s+3}^{(j)}\left(\sqrt{q}e^{z}\right)\right\}-\\ -J_{l+s+2}\left(\sqrt{q}e^{-z}\right)\left\{\frac{l-s}{\sqrt{q}e^{z}}C_{l-s}^{(j)}\left(\sqrt{q}e^{z}\right)-C_{l-s+1}^{(j)}\left(\sqrt{q}e^{z}\right)\right\}\end{array}\right\}\end{array}\right\}$$

.

*Pour ce qui est des dérivées premières des fonctions radiales Ie, Io, Ke et Ko, il vient :*

$$\begin{cases} Ie_{2n}'(z,-q)=(-1)^n \dfrac{ce_{2n}(0,|q|)ce_{2n}(\pi/2,|q|)}{A_0^{(2n)}}\widetilde{M}c_{2n}^{(1)}{}'(z,-q) & Ie_{2n+1}'(z,q)=(-1)^n \dfrac{\dfrac{\partial se_{2n+1}(0,|q|)}{\partial z}se_{2n+1}(\pi/2,|q|)}{\sqrt{q}B_1^{(2n+1)}}\widetilde{M}c_{2n+1}^{(1)}{}'(z,-q) \\ Io_{2n+1}'(z,-q)=(-1)^{n+1} \dfrac{ce_{2n+1}(0,|q|)\dfrac{\partial ce_{2n+1}(\pi/2,|q|)}{\partial z}}{\sqrt{q}A_1^{(2n+1)}}\widetilde{M}s_{2n+1}^{(1)}{}'(z,q) & Io_{2n+2}'(z,-q)=(-1)^{n+1} \dfrac{\dfrac{\partial se_{2n+2}(0,|q|)}{\partial z}\dfrac{\partial se_{2n+2}(\pi/2,|q|)}{\partial z}}{qB_2^{(2n+2)}}\widetilde{M}s_{2n+2}^{(1)}{}'(z,-q) \\ Ke_{2n}'(z,-q)=(-1)^n \dfrac{ce_{2n}(0,|q|)ce_{2n}(\pi/2,|q|)}{\pi A_0^{(2n)}}\widetilde{M}c_{2n}^{(2)}{}'(z,q) & Ke_{2n+1}'(z,-q)=(-1)^n \dfrac{\dfrac{\partial se_{2n+1}(0,|q|)}{\partial z}se_{2n+1}(\pi/2,|q|)}{\pi\sqrt{q}B_1^{(2n+1)}}\widetilde{M}c_{2n+1}^{(2)}{}'(z,-q) \\ Ko_{2n+1}'(z,-q)=(-1)^{n+1} \dfrac{ce_{2n+1}(0,|q|)\dfrac{\partial ce_{2n+1}(\pi/2,|q|)}{\partial z}}{\pi\sqrt{q}A_1^{(2n+1)}}\widetilde{M}s_{2n+1}^{(2)}{}'(z,q) & Ko_{2n+2}'(z,-q)=(-1)^{n+1} \dfrac{\dfrac{\partial se_{2n+2}(0,|q|)}{\partial z}\dfrac{\partial se_{2n+2}(\pi/2,|q|)}{\partial z}}{\pi qB_2^{(2n+2)}}\widetilde{M}s_{2n+2}^{(2)}{}'(z,-q) \end{cases}$$

*Les dérivées premières des fonctions Mc et Ms Tilde sont les suivantes :*

$j=1,2 \quad S_\nu^{(1)}(x)=I_\nu(x) \quad S_\nu^{(2)}(x)=K_\nu(x)$

$$\widetilde{M}c_{2n}^{(j)}{}'(z,-q)=\frac{(-1)^{j-1}\sqrt{|q|}Sinh(z)}{ce_{2n}(\pi/2,|q|)}\sum_{l=0}^{l=\infty}(-1)^l A_{2l}^{(2n)}\left\{S_{2l-1}^{(j)}\left(2\sqrt{|q|}Cosh(z)\right)+S_{2l+1}^{(j)}\left(2\sqrt{|q|}Cosh(z)\right)\right\}$$

$$\widetilde{M}c_{2n}^{(j)}{}'(z,-q)=\frac{(-1)^{j-1}\sqrt{|q|}Cosh(z)}{ce_{2n}(0,|q|)}\sum_{l=0}^{l=\infty}A_{2l}^{(2n)}\left\{S_{2l-1}^{(j)}\left(2\sqrt{|q|}Sinh(z)\right)+S_{2l+1}^{(j)}\left(2\sqrt{|q|}Sinh(z)\right)\right\}$$

$$\widetilde{M}c_{2n+1}^{(j)}{}'(z,-q)=\frac{(-1)^{j-1}\sqrt{|q|}Sinh(z)}{se_{2n+1}(\pi/2,|q|)}\sum_{l=0}^{l=\infty}(-1)^l B_{2l+1}^{(2n+1)}\left\{S_{2l}^{(j)}\left(2\sqrt{|q|}Cosh(z)\right)+S_{2l+2}^{(j)}\left(2\sqrt{|q|}Cosh(z)\right)\right\}$$

$$\widetilde{M}c_{2n+1}^{(j)}{}'(z,-q)=\frac{(-1)^{(n+1)(j-1)}\sqrt{|q|}}{\dfrac{\partial se_{2n+1}(0,|q|)}{\partial z}Sinh(z)}\sum_{l=0}^{l=\infty}B_{2l+1}^{(2n+1)}\left\{\left((2l+1)Cosh^2(z)-1\right)S_{2l}^{(j)}\left(2\sqrt{|q|}Sinh(z)\right)+\left((2l+1)Cosh^2(z)+1\right)S_{2l+2}^{(j)}\left(2\sqrt{|q|}Sinh(z)\right)\right\}$$

$$\widetilde{M}s_{2n+1}^{(j)}{}'(z,-q)=-\frac{(-1)^{j-1}\sqrt{|q|}}{\dfrac{\partial ce_{2n+1}(\pi/2,|q|)}{\partial z}Cosh(z)}\sum_{l=0}^{l=\infty}(-1)^l A_{2l+1}^{(2n+1)}\left\{\left((2l+1)Sinh^2(z)+1\right)S_{2l}^{(j)}\left(2\sqrt{|q|}Cosh(z)\right)+\left((2l+1)Sinh^2(z)-1\right)S_{2l+2}^{(j)}\left(2\sqrt{|q|}Cosh(z)\right)\right\}$$

$$\widetilde{M}s_{2n+1}^{(j)}{}'(z,-q)=\frac{(-1)^{j-1}\sqrt{|q|}Cosh(z)}{ce_{2n+1}(0,|q|)}\sum_{l=0}^{l=\infty}A_{2l+1}^{(2n+1)}\left\{S_{2l}^{(j)}\left(2\sqrt{|q|}Sinh(z)\right)+S_{2l+2}^{(j)}\left(2\sqrt{|q|}Sinh(z)\right)\right\}$$

$$\widetilde{M}s_{2n+2}^{(j)}{}'(z,-q)=\frac{(-1)^{j-1}\sqrt{|q|}}{\dfrac{\partial se_{2n+2}(\pi/2,|q|)}{\partial z}Cosh(z)}\sum_{l=0}^{l=\infty}(-1)^l B_{2l+2}^{(2n+2)}\left\{\left((2l+2)Sinh^2(z)+1\right)S_{2l+1}^{(j)}\left(2\sqrt{|q|}Cosh(z)\right)+\left((2l+2)Sinh^2(z)-1\right)S_{2l+3}^{(j)}\left(2\sqrt{|q|}Cosh(z)\right)\right\}$$

$$\widetilde{M}s_{2n+2}^{(j)}{}'(z,-q)=-\frac{(-1)^{j-1}\sqrt{|q|}}{\dfrac{\partial se_{2n+2}(0,|q|)}{\partial z}Sinh(z)}\sum_{l=0}^{l=\infty}B_{2l+2}^{(2n+2)}\left\{\left(Cosh^2(z)(2l+2)-1\right)S_{2l+1}^{(j)}\left(2\sqrt{|q|}Sinh(z)\right)+\left(Cosh^2(z)(2l+2)+1\right)S_{2l+3}^{(j)}\left(2\sqrt{|q|}Sinh(z)\right)\right\}$$

.

*Et les dérivées premières pour les séries de produits de fonction de Bessel donnent :*

$$j=1{,}2 \quad S_{\nu}^{(1)}(x)=I_{\nu}(x) \quad S_{\nu}^{(2)}(x)=K_{\nu}(x) \quad \begin{cases} \varepsilon_s=2 & si\ s=0 \\ \varepsilon_s=1 & si\ s\neq 0 \end{cases}$$

$$s/Max\left(\left|A_{2l}^{(2n)}\right|, l\geq 0\right) \quad \widetilde{M}c_{2n}^{(j)}{}'(z,-q)=\frac{\sqrt{|q|}}{2\varepsilon_s A_{2s}^{(2n)}}\sum_{l=0}^{l=\infty}(-1)^{j(l+s+j-1)}A_{2l}^{(2n)}\left\{\begin{array}{l} -e^{-z}\left\{\begin{array}{l}\left(I_{l-s-1}\left(\sqrt{|q|}e^{-z}\right)+I_{l-s+1}\left(\sqrt{|q|}e^{-z}\right)\right)S_{l+s}^{(j)}\left(\sqrt{|q|}e^{z}\right)+ \\ +\left(I_{l+s-1}\left(\sqrt{|q|}e^{-z}\right)+I_{l+s+1}\left(\sqrt{|q|}e^{-z}\right)\right)S_{l-s}^{(j)}\left(\sqrt{|q|}e^{z}\right)\end{array}\right\}+ \\ +e^{z}(-1)^{j-1}\left\{\begin{array}{l} I_{l-s}\left(\sqrt{|q|}e^{-z}\right)\left(S_{l+s-1}^{(j)}\left(\sqrt{|q|}e^{z}\right)+S_{l+s+1}^{(j)}\left(\sqrt{|q|}e^{z}\right)\right)+ \\ +I_{l+s}\left(\sqrt{|q|}e^{-z}\right)\left(S_{l-s-1}^{(j)}\left(\sqrt{|q|}e^{z}\right)+S_{l-s+1}^{(j)}\left(\sqrt{|q|}e^{z}\right)\right)\end{array}\right\}\end{array}\right\}$$

$$s/Max\left(\left|A_{2l}^{(2n)}\right|, l\geq 0\right) \quad \widetilde{M}c_{2n+1}^{(j)}{}'(z,-q)=\frac{1}{2B_{2s+1}^{(2n+1)}}\sum_{l=0}^{l=\infty}(-1)^{j(l+s+j-1)}B_{2l+1}^{(2n+1)}\left\{\begin{array}{l} -e^{-z}\left\{\begin{array}{l}\left(I_{l-s-1}\left(\sqrt{|q|}e^{-z}\right)+I_{l-s+1}\left(\sqrt{|q|}e^{-z}\right)\right)S_{l+s+1}^{(j)}\left(\sqrt{|q|}e^{z}\right)+ \\ +(-1)^{j-1}\left(I_{l+s}\left(\sqrt{|q|}e^{-z}\right)+I_{l+s+2}\left(\sqrt{|q|}e^{-z}\right)\right)S_{l-s}^{(j)}\left(\sqrt{|q|}e^{z}\right)\end{array}\right\}+ \\ +e^{z}\left\{\begin{array}{l} (-1)^{j-1}I_{l-s}\left(\sqrt{|q|}e^{-z}\right)\left(S_{l+s}^{(j)}\left(\sqrt{|q|}e^{z}\right)+S_{l+s+2}^{(j)}\left(\sqrt{|q|}e^{z}\right)\right)+ \\ +I_{l+s+1}\left(\sqrt{|q|}e^{-z}\right)\left(S_{l-s-1}^{(j)}\left(\sqrt{|q|}e^{z}\right)+S_{l-s+1}^{(j)}\left(\sqrt{|q|}e^{z}\right)\right)\end{array}\right\}\end{array}\right\}$$

$$s/Max\left(\left|A_{2l}^{(2n)}\right|, l\geq 0\right) \quad \widetilde{M}s_{2n+1}^{(j)}{}'(z,-q)=\frac{1}{2A_{2s+1}^{(2n+1)}}\sum_{l=0}^{l=\infty}(-1)^{j(l+s+j)}A_{2l+1}^{(2n+1)}\left\{\begin{array}{l} -e^{-z}\left\{\begin{array}{l}\left(I_{l-s-1}\left(\sqrt{|q|}e^{-z}\right)+I_{l-s+1}\left(\sqrt{|q|}e^{-z}\right)\right)S_{l+s+1}^{(j)}\left(\sqrt{|q|}e^{z}\right)+ \\ +(-1)^{j-1}\left(I_{l+s}\left(\sqrt{|q|}e^{-z}\right)+I_{l+s+2}\left(\sqrt{|q|}e^{-z}\right)\right)S_{l-s}^{(j)}\left(\sqrt{|q|}e^{z}\right)\end{array}\right\}+ \\ +e^{z}\left\{\begin{array}{l} (-1)^{j-1}I_{l-s}\left(\sqrt{|q|}e^{-z}\right)\left(S_{l+s}^{(j)}\left(\sqrt{|q|}e^{z}\right)+S_{l+s+2}^{(j)}\left(\sqrt{|q|}e^{z}\right)\right)+ \\ +I_{l+s+1}\left(\sqrt{|q|}e^{-z}\right)\left(S_{l-s-1}^{(j)}\left(\sqrt{|q|}e^{z}\right)+S_{l-s+1}^{(j)}\left(\sqrt{|q|}e^{z}\right)\right)\end{array}\right\}\end{array}\right\}$$

$$s/Max\left(\left|A_{2l}^{(2n)}\right|, l\geq 0\right) \quad \widetilde{M}s_{2n+2}^{(j)}{}'(z,-q)=\frac{1}{2B_{2s+2}^{(2n+2)}}\sum_{l=0}^{l=\infty}(-1)^{j(l+s+j-1)}B_{2l+2}^{(2n+2)}\left\{\begin{array}{l} -e^{-z}\left\{\begin{array}{l}\left(I_{l-s-1}\left(\sqrt{|q|}e^{-z}\right)+I_{l-s+1}\left(\sqrt{|q|}e^{-z}\right)\right)S_{l+s+2}^{(j)}\left(\sqrt{|q|}e^{z}\right)- \\ -\left(I_{l+s+1}\left(\sqrt{|q|}e^{-z}\right)+I_{l+s+3}\left(\sqrt{|q|}e^{-z}\right)\right)S_{l-s}^{(j)}\left(\sqrt{|q|}e^{z}\right)\end{array}\right\}+ \\ +e^{z}(-1)^{j-1}\left\{\begin{array}{l} I_{l-s}\left(\sqrt{|q|}e^{-z}\right)\left(S_{l+s+1}^{(j)}\left(\sqrt{|q|}e^{z}\right)+S_{l+s+3}^{(j)}\left(\sqrt{|q|}e^{z}\right)\right)- \\ -I_{l+s+2}\left(\sqrt{|q|}e^{-z}\right)\left(S_{l-s-1}^{(j)}\left(\sqrt{|q|}e^{z}\right)+S_{l-s+1}^{(j)}\left(\sqrt{|q|}e^{z}\right)\right)\end{array}\right\}\end{array}\right\}$$

.

***Relation d'orthogonalité unidimensionnelle des fonctions de Mathieu***

*Qui dit possibilité de développement en série de fonction de Mathieu (une série de Fourier de généralisée), pose la question de l'orthogonalité des fonctions de Mathieu qui légitime en quelque sorte ce développement, et qui est le fondement de la résolution de tous les problèmes de Sturm-Liouville. La seconde question tout aussi importante est le mode de calcul des normes et des intégrales définies.*

*Les fonctions de Mathieu possède plusieurs propriétés d'orthogonalité. Tout d'abord l'orthogonalité des fonctions périodiques d'indice entier est établit , en prenant deux solutions indépendantes de l'équation de Mathieu pour une même valeur de q comme suit :*

$$\Theta_1''(z)+(\lambda_1-2|q|\,Cos(2z))\Theta_1(z)=0 \quad (1)$$

$$\Theta_2''(z)+(\lambda_2-2|q|\,Cos(2z))\Theta_2(z)=0 \quad (2)$$

$$(1)\Theta_2(z)-(2)\Theta_1(z)\Rightarrow \Theta_1''(z)\Theta_2(z)-\Theta_2''(z)\Theta_1(z)=(\lambda_2-\lambda_1)\,\Theta_1(z)\Theta_2(z)$$

$$\Rightarrow \int_{z_1}^{z_2} dz\,(\Theta_1''(z)\Theta_2(z)-\Theta_2''(z)\Theta_1(z))=(\lambda_2-\lambda_1)\int_{z_1}^{z_2} dz\,\Theta_1(z)\Theta_2(z)$$

$$\Rightarrow [\Theta_1'(z)\Theta_2(z)-\Theta_2'(z)\Theta_1(z)]_{z_1}^{z_2}=(\lambda_2-\lambda_1)\int_{z_1}^{z_2} dz\,\Theta_1(z)\Theta_2(z)$$

$$\textit{Période } \pi \textit{ ou } 2\pi \textit{, en posant } z_1=0, z_2=2\pi \Rightarrow [\Theta_1'(z)\Theta_2(z)-\Theta_2'(z)\Theta_1(z)]_0^{2\pi}=0$$

$$\Rightarrow si\ \ \lambda_2\neq\lambda_1\ alors\ (\lambda_2-\lambda_1)\int_0^{2\pi} dz\,\Theta_1(z)\Theta_2(z)=0\Rightarrow \int_0^{2\pi} dz\,\Theta_1(z)\Theta_2(z)=0$$

*Comme les fonctions prennent les formes possibles suivantes, il vient*

$$\Theta_1(z)=A_\theta\ ce_n(z,|q|)+B_\theta\ se_n(z,|q|)\leftrightarrow \lambda_1(|q|,n,parit\acute{e})$$

$$\Theta_2(z)=C_\theta\ ce_p(z,|q|)+D_\theta\ se_p(z,|q|)\leftrightarrow \lambda_2(|q|,p,parit\acute{e})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \int_0^{2\pi} dz\ ce_n(z,|q|)ce_m(z,|q|)=0 \quad si \quad n\neq m \\ \int_0^{2\pi} dz\ ce_n(z,|q|)se_m(z,|q|)=0 \quad si \quad n\neq m \\ \int_0^{2\pi} dz\ se_n(z,|q|)se_m(z,|q|)=0 \quad si \quad n\neq m \end{cases}$$

*Pour établir le résultat supplémentaire d'orthogonalité entre les fonctions paires et impaires sur un même indice n, procédons de la même façon :* $\int_0^{2\pi} dz\ ce_n(z,|q|)se_n(z,|q|)=0$

$$ce_n(z,|q|)\ solution\ de\ l'\acute{e}quation\ de\ Mathieu\ ce_n''(z,|q|)+(\lambda_{1n}-2|q|\,Cos(2z))ce_n(z,|q|)=0$$

$$se_n(z,|q|)\ solution\ de\ l'\acute{e}quation\ de\ Mathieu\ se_n''(z,|q|)+(\lambda_{2n}-2|q|\,Cos(2z))se_n(z,|q|)=0$$

$$on\ sait\ que\ \lambda_{1n}\neq\lambda_{2n}(parit\acute{e}\ des\ fonctions\neq)\ et\ (\lambda_{2n}-\lambda_{1n})\int_0^{2\pi} dz\ ce_n(z,|q|)se_n(z,|q|)=0$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} dz\ ce_n(z,|q|)se_n(z,|q|)=0$$

*Le calcul des normes des fonctions propres de Mathieu se fait à partir de la décomposition en série de Fourier des fonctions de Mathieu:*

$$ce_{2n}(z,q)=\sum_{l=0}^{l=\infty} A_{2l}^{(2n)} Cos(2l\,z) \quad \textit{Nombre caractéristique } a_{2n}(q)$$

$$ce_{2n+1}(z,q)=\sum_{l=0}^{l=\infty} A_{2l}^{(2n)} Cos((2l+1)z) \quad \textit{Nombre caractéristique } a_{2n+1}(q)$$

$$se_{2n+1}(z,q)=\sum_{l=0}^{l=\infty} B_{2l+1}^{(2n+1)} Sin((2l+1)z) \quad \textit{Nombre caractéristique } b_{2n+1}(q)$$

$$se_{2n+2}(z,q)=\sum_{l=0}^{l=\infty} B_{2l+2}^{(2n+2)} Sin((2l+2)z) \quad \textit{Nombre caractéristique } b_{2n+2}(q)$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} dz\,\left(ce_{2n}(z,|q|)\right)^2 = 2\left(A_0^{(2n)}\right)^2+\sum_{l=1}^{l=\infty}\left(A_{2l}^{(2n)}\right)^2$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} dz\,\left(ce_{2n+1}(z,|q|)\right)^2 = \sum_{l=0}^{l=\infty}\left(A_{2l+1}^{(2n+1)}\right)^2$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} dz\,\left(se_{2n+1}(z,|q|)\right)^2 = \sum_{l=0}^{l=\infty}\left(B_{2l+1}^{(2n+1)}\right)^2$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} dz\,\left(se_{2n+2}(z,|q|)\right)^2 = \sum_{l=0}^{l=\infty}\left(B_{2l+2}^{(2n+2)}\right)^2$$

$$\textit{Normalisation choisie } \frac{\int_0^{2\pi} dz\,\left(ce_{2n}(z,|q|)\right)^2}{\pi}=\frac{\int_0^{2\pi} dz\,\left(ce_{2n+1}(z,|q|)\right)^2}{\pi}=\frac{\int_0^{2\pi} dz\,\left(se_{2n+1}(z,|q|)\right)^2}{\pi}=\frac{\int_0^{2\pi} dz\,\left(se_{2n+2}(z,|q|)\right)^2}{\pi}=1$$

$$\Rightarrow 2\left(A_0^{(2n)}\right)^2+\sum_{l=1}^{l=\infty}\left(A_{2l}^{(2n)}\right)^2=1 \quad et \quad \sum_{l=0}^{l=\infty}\left(A_{2l+1}^{(2n+1)}\right)^2=1 \quad et \quad \sum_{l=0}^{l=\infty}\left(B_{2l+1}^{(2n+1)}\right)^2=1 \quad et \quad \sum_{l=0}^{l=\infty}\left(B_{2l+2}^{(2n+2)}\right)^2=1$$

*On peut établir une relation similaire d'orthogonalité sur les fonctions de Mathieu d'ordre rationnel. Dans ce cas en réduisant l'ordre fractionnel à sa représentation irréductible ν=p/s, la période des fonctions de Mathieu est 2πs. Les relations d'orthogonalité s'écrivent sous la forme :*

$$\nu = \frac{n}{s} \quad \mu = \frac{n'}{s'} \quad s \text{ minimum de } s, s'$$

$$\int_0^{2\pi s} dz\, ce_\nu(z,|q|) ce_\mu(z,|q|) = \int_0^{2\pi s} dz\, ce_\nu(z,|q|) ce_\mu(z,|q|) = \int_0^{2\pi s} dz\, se_\nu(z,|q|) se_\mu(z,|q|) = 0 \quad si \quad \nu \neq \mu$$

$$\int_0^{2\pi s} dz\, ce_\nu(z,|q|)^2 \neq 0 \quad et \quad \int_0^{2\pi s} dz\, se_\nu(z,|q|)^2 \neq 0$$

***Relation d'orthogonalité bidimensionnelle des fonctions de Mathieu***

*La deuxième relation d'orthogonalité des fonctions de Mathieu est une relation bidimensionnelle couplée entre les solutions provenant de la séparation des variables d'une équation aux dérivées partielles (typiquement une équation de diffusion, une équation de Laplace, une équation de propagation), soit l'équation de Mathieu (partie angulaire) et l'équation de Mathieu modifiée (partie radiale). Si nous reprenons l'exemple de l'équation de Laplace en coordonnées elliptiques cylindriques à trois dimensions (cas $\alpha_3$<0, conditions aux limites inhomogènes en z, conduisant à exclure les fonctions sinusoïdales, au profit de fonctions hyperboliques):*

$$T(\eta,\theta,z) = U(\eta,\theta)Z(z) = R(\eta)\Theta(\theta)Z(z)$$

$$\left(\frac{\partial^2 U(\eta,\theta))}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 U(\eta,\theta)}{\partial \theta^2}\right) + 2|\alpha_3|c^2\big(Cosh(2\eta) - Cos(2\theta)\big)U(\eta,\theta) = 0 \quad et \quad Z''(z) - |\alpha_3|Z(z) = 0$$

$$En\ posant\ q = \frac{|\alpha_3|c^2}{4}\ et\ \lambda = \alpha_2 - \frac{|\alpha_3|c^2}{2} \Rightarrow \left(\frac{\partial^2 U(\eta,\theta))}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 U(\eta,\theta)}{\partial \theta^2}\right) + 2q\big(Cosh(2\eta) - Cos(2\theta)\big)U(\eta,\theta) = 0$$

$$\Theta''(\theta) + (\lambda - 2q\ Cos(2\theta))\Theta(\theta) = 0 \quad \text{équation de Mathieu}$$

$$R''(\eta) - (\lambda - 2q\ Cosh(2\eta))R(\eta) = 0 \quad \text{équation de Mathieu modifiée}$$

*ou bien encore dans la séparation de l'équation de diffusion (solution uniformément nulle lorsque le temps est infini):*

$$T(\eta,\theta,t)=U(\eta,\theta)D(t)$$

$$\left(\frac{\partial^2 U(\eta,\theta)}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2 U(\eta,\theta)}{\partial\theta^2}\right)+2\mu_n^2\,c^2\big(Cosh(2\eta)-Cos(2\theta)\big)U(\eta,\theta)=0 \quad \mu_n>0$$

$$\frac{1}{\delta}\frac{D'(t)}{D(t)}=-\mu_n^2 \Rightarrow D(t)=e^{-\delta\mu_n^2 t} \Rightarrow \begin{cases}\Theta''(\theta)+(\alpha_2-\frac{\mu^2c^2}{2}-2\frac{\mu^2c^2}{4}Cos(2\theta))\Theta(\theta)=0\\ R''(\eta)-(\alpha_2-\frac{\mu^2c^2}{2}-2\frac{\mu^2c^2}{4}Cosh(2\eta))R(\eta)=0\end{cases}$$

*En posant* $q=\frac{\mu^2c^2}{4}$ *et* $\lambda=\alpha_2-\frac{\mu^2c^2}{2}$

$\Theta''(\theta)+(\lambda-2q\;Cos(2\theta))\Theta(\theta)=0$ *équation de Mathieu*

$R''(\eta)-(\lambda-2q\;Cosh(2\eta))R(\eta)=0$ *équation de Mathieu modifiée*

*On parvient à la formalisation d'une équation de Helmholtz dont les conditions aux limites homogènes peuvent se traduire par une condition plus générale de Robin pour laquelle le paramètre α est susceptible de dépendre de l'angle :*

$$\left.\frac{\alpha}{\sqrt{Cosh^2(\eta)-Cos^2(\theta)}}\frac{\partial U(\eta,\theta)}{\partial\eta}+\beta\,U(\eta,\theta)\right|_{\eta=\eta_0}=0$$

*Plus communément on se restreint aux cas Dirichlet ou Neumann* $\alpha=0{,}1 \quad \alpha+\beta=1$

*Cette condition devant être respectée, conduit à l'établissement d'une multiplicité de solutions caractérisées par un double indice de paramètre q :* $q_{n,m}$ *et par conséquent à une multiplicité de caractéristique* $a(q_{n,m})$.

$$\left(\frac{\partial^2 U(\eta,\theta)}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2 U(\eta,\theta)}{\partial\theta^2}\right)+2q\big(Cosh(2\eta)-Cos(2\theta)\big)U(\eta,\theta)=0$$

$$\left.\frac{\alpha}{\sqrt{Cosh^2(\eta)-Cos^2(\theta)}}\frac{\partial U(\eta,\theta)}{\partial\eta}+\beta\,U(\eta,\theta)\right|_{\eta=\eta_0}=0 \Rightarrow q>0, q=|q|_{n,m} \quad et \quad a_{n,m}=a\big(|q|_{n,m}\big) \quad U_{n,m}(\eta,\theta)=R_{n,m}(\eta)\,\Theta_{n,m}(\theta)$$

$$\left(\frac{\partial^2 U_{n,m}(\eta,\theta)}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2 U_{n,m}(\eta,\theta)}{\partial\theta^2}\right)+2|q|_{n,m}\big(Cosh(2\eta)-Cos(2\theta)\big)U_{n,m}(\eta,\theta)=0$$

$$\Theta''_{n,m}(\theta)+(a_{n,m}-2|q|_{n,m}\;Cos(2\theta))\Theta_{n,m}(\theta)=0 \quad et \quad R''_{n,m}(\eta)-(a_{n,m}-2|q|_{n,m}\;Cosh(2\eta))R_{n,m}(\eta)=0$$

*On peut résumer la situation en choisissant deux solutions quelconques d'indice n,m et p,r différent:*

$$\left(\frac{\partial^2 U_{n,m}(\eta,\theta)}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2 U_{n,m}(\eta,\theta)}{\partial\theta^2}\right)+2|q|_{n,m}(Cosh(2\eta)-Cos(2\theta))U_{n,m}(\eta,\theta)=0 \quad (1)$$

$$\left(\frac{\partial^2 U_{p,r}(\eta,\theta)}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2 U_{p,r}(\eta,\theta)}{\partial\theta^2}\right)+2|q|_{p,r}(Cosh(2\eta)-Cos(2\theta))U_{p,r}(\eta,\theta)=0 \quad (2)$$

$$(1)\quad U_{p,r}(\eta,\theta)-(2)U_{n,m}(\eta,\theta)\Rightarrow\left(\frac{\partial^2 U_{n,m}(\eta,\theta)}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2 U_{n,m}(\eta,\theta)}{\partial\theta^2}\right)U_{p,r}(\eta,\theta)-\left(\frac{\partial^2 U_{p,r}(\eta,\theta)}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2 U_{p,r}(\eta,\theta)}{\partial\theta^2}\right)U_{n,m}(\eta,\theta)+$$

$$+2\left(|q|_{n,m}-|q|_{p,r}\right)(Cosh(2\eta)-Cos(2\theta))U_{n,m}(\eta,\theta)U_{p,r}(\eta,\theta)=0$$

$$\Rightarrow\frac{\partial}{\partial\eta}\left(U_{p,r}(\eta,\theta)\frac{\partial U_{n,m}(\eta,\theta)}{\partial\eta}-U_{n,m}(\eta,\theta)\frac{\partial U_{p,r}(\eta,\theta)}{\partial\eta}\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(U_{p,r}(\eta,\theta)\frac{\partial U_{n,m}(\eta,\theta)}{\partial\theta}-U_{n,m}(\eta,\theta)\frac{\partial U_{p,r}(\eta,\theta)}{\partial\theta}\right)+$$

$$+2\left(|q|_{n,m}-|q|_{p,r}\right)(Cosh(2\eta)-Cos(2\theta))U_{n,m}(\eta,\theta)U_{p,r}(\eta,\theta)=0 \quad (3)$$

$$\int_0^{\eta_0}d\eta\int_0^{2\pi}d\theta\ (3)\Rightarrow\int_0^{2\pi}d\theta\left[U_{p,r}(\eta,\theta)\frac{\partial U_{n,m}(\eta,\theta)}{\partial\eta}-U_{n,m}(\eta,\theta)\frac{\partial U_{p,r}(\eta,\theta)}{\partial\eta}\right]_0^{\eta_0}+$$

$$+\int_0^{\eta_0}d\eta\left[U_{p,r}(\eta,\theta)\frac{\partial U_{n,m}(\eta,\theta)}{\partial\theta}-U_{n,m}(\eta,\theta)\frac{\partial U_{p,r}(\eta,\theta)}{\partial\theta}\right]_0^{2\pi}+$$

$$+2\left(|q|_{n,m}-|q|_{p,r}\right)\int_0^{\eta_0}d\eta\int_0^{2\pi}d\theta\ (Cosh(2\eta)-Cos(2\theta))U_{n,m}(\eta,\theta)U_{p,r}(\eta,\theta)=0$$

$$C.L.\ homogènes\Rightarrow\frac{\alpha}{\sqrt{Cosh^2(\eta)-Cos^2(\theta)}}\frac{\partial U(\eta,\theta)}{\partial\eta}+\beta\,U(\eta,\theta)\Big|_{\eta=\eta_0}=0\Rightarrow\frac{\partial U_{n,m}(\eta,\theta)}{\partial\eta}\Big|_{\eta=\eta_0}=-\frac{\beta\sqrt{Cosh^2(\eta_0)-Cos^2(\theta)}}{\alpha}U(\eta_0,\theta)$$

$$\Rightarrow U_{p,r}(\eta,\theta)\frac{\partial U_{n,m}(\eta,\theta)}{\partial\eta}-U_{n,m}(\eta,\theta)\frac{\partial U_{p,r}(\eta,\theta)}{\partial\eta}\Big|_{\eta=\eta_0}=U_{n,m}(\eta_0,\theta)U_{p,r}(\eta_0,\theta)\left\{\frac{\beta\sqrt{Cosh^2(\eta_0)-Cos^2(\theta)}}{\alpha}-\frac{\beta\sqrt{Cosh^2(\eta_0)-Cos^2(\theta)}}{\alpha}\right\}=0$$

$$U_{p,r}(\eta,\theta)\frac{\partial U_{n,m}(\eta,\theta)}{\partial\eta}-U_{n,m}(\eta,\theta)\frac{\partial U_{p,r}(\eta,\theta)}{\partial\eta}\Big|_{\eta=0}=0\Leftarrow\left|\begin{array}{l}Si\ U_{n,m}(\eta,\theta)=Ce_n(\eta,|q|_{n,m})\ ce_n(\theta,|q|_{n,m})\\ ou\ Se_n(\eta,|q|_{n,m})\ se_n(\theta,|q|_{n,m})\ voir\ explication\ plus\ bas\end{array}\right.$$

$$\left[U_{p,r}(\eta,\theta)\frac{\partial U_{n,m}(\eta,\theta)}{\partial\eta}-U_{n,m}(\eta,\theta)\frac{\partial U_{p,r}(\eta,\theta)}{\partial\eta}\right]_0^{2\pi}=0\Leftarrow périodicité\ 2\pi\ de\ la\ solution$$

$$\Rightarrow\left(|q|_{n,m}-|q|_{p,r}\right)\int_0^{\eta_0}d\eta\int_0^{2\pi}d\theta\ (Cosh(2\eta)-Cos(2\theta))U_{n,m}(\eta,\theta)U_{p,r}(\eta,\theta)=0$$

$$\Rightarrow\int_0^{\eta_0}d\eta\int_0^{2\pi}d\theta\ (Cosh(2\eta)-Cos(2\theta))U_{n,m}(\eta,\theta)U_{p,r}(\eta,\theta)=0\quad si\ |q|_{n,m}\neq|q|_{p,r}$$

.

*Le terme en η=0:* $U_{p,r}(\eta,\theta)\frac{\partial U_{n,m}(\eta,\theta)}{\partial\eta}-U_{n,m}(\eta,\theta)\frac{\partial U_{p,r}(\eta,\theta)}{\partial\eta}\bigg|_{\eta=0}$ *s'annule en η=0 puisque:*

$$Si\quad U_{n,m}(\eta,\theta)=Je_n(\eta,|q|_{n,m})ce_n(\theta,|q|_{n,m})$$

$$U_{p,r}(\eta,\theta)\frac{\partial U_{n,m}(\eta,\theta)}{\partial\eta}-U_{n,m}(\eta,\theta)\frac{\partial U_{p,r}(\eta,\theta)}{\partial\eta}=$$

$$Je_p(\eta,|q|_{p,r})ce_p(\theta,|q|_{p,r})ce_n(\theta,|q|_{n,m})\frac{\partial Je_n(\eta,|q|_{n,m})}{\partial\eta}-Je_n(\eta,|q|_{n,m})ce_n(\theta,|q|_{n,m})ce_p(\theta,|q|_{p,r})\frac{\partial Je_p(\eta,|q|_{p,r})}{\partial\eta}$$

$$=ce_p(\theta,|q|_{p,r})ce_n(\theta,|q|_{n,m})\left(Je_p(\eta,|q|_{p,r})\frac{\partial Je_n(\eta,|q|_{n,m})}{\partial\eta}-Je_n(\eta,|q|_{n,m})\frac{\partial Je_p(\eta,|q|_{p,r})}{\partial\eta}\right)$$

$$Si\quad U_{n,m}(\eta,\theta)=Jo_n(\eta,|q|_{n,m})se_n(\theta,|q|_{n,m})$$

$$U_{p,r}(\eta,\theta)\frac{\partial U_{n,m}(\eta,\theta)}{\partial\eta}-U_{n,m}(\eta,\theta)\frac{\partial U_{p,r}(\eta,\theta)}{\partial\eta}=$$

$$Jo_p(\eta,|q|_{p,r})se_p(\theta,|q|_{p,r})se_n(\theta,|q|_{n,m})\frac{\partial Jo_n(\eta,|q|_{n,m})}{\partial\eta}-Jo_n(\eta,|q|_{n,m})se_n(\theta,|q|_{n,m})se_p(\theta,|q|_{p,r})\frac{\partial Jo_p(\eta,|q|_{p,r})}{\partial\eta}$$

$$=se_p(\theta,|q|_{p,r})se_n(\theta,|q|_{n,m})\left(Jo_p(\eta,|q|_{p,r})\frac{\partial Jo_n(\eta,|q|_{n,m})}{\partial\eta}-Jo_n(\eta,|q|_{n,m})\frac{\partial Jo_p(\eta,|q|_{p,r})}{\partial\eta}\right)$$

*Pour une raison très simple. Lorsque l'on utilise la fonction* $Je_n(\eta,|q|_{n,m})$*, la fonction est paire mais par construction sa dérivée est impaire (développement uniquement de fonctions sinus hyperbolique) donc s'annule en η=0. Et lorsque l'on utilise la fonction* $Jo_n(\eta,|q|_{n,m})$*, elle est directement impaire et s'annule en 0 η=0. Ce qui valide la disparition du terme en η=0.*

*En revanche les normes en double intégration servent au calcul des solutions des problèmes aux limites homogène en angle avec soit des conditions initiales (régime transitoire de l'équation de la chaleur) soit des conditions aux limites inhomogènes dépendantes des deux variables η,ϑ :*

$$Si\ U_{n,m}(\eta,\theta)=Je_n(\eta,|q|_{n,m})\ ce_n(\theta,|q|_{n,m})\quad ou\quad Jo_n(\eta,|q|_{n,m})\ se_n(\theta,|q|_{n,m})$$

$$\int_0^{\eta_0}d\eta\int_0^{2\pi}d\theta\left(Cosh(2\eta)-Cos(2\theta)\right)Je_n^{\,2}(\eta,|q|_{n,m})\ ce_n^{\,2}(\theta,|q|_{n,m})\neq 0$$

$$\int_0^{\eta_0}d\eta\int_0^{2\pi}d\theta\left(Cosh(2\eta)-Cos(2\theta)\right)Jo_n^{\,2}(\eta,|q|_{n,m})\ se_n^{\,2}(\theta,|q|_{n,m})\neq 0$$

*Notamment lorsque l'on prend en compte une condition initiale (équation de diffusion). Dans ce cas il vient un développement en série de la forme (f étant la fonction initiale) :*

$$U_{n,m}(\eta,\theta) = Je_n(\eta,|q|_{n,m})\ ce_n(\vartheta,|q|_{n,m})\ ou\ Jo_n(\eta,|q|_{n,m})\ se_n(\vartheta,|q|_{n,m}) \Rightarrow f(\eta,\theta) = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=1}^{+\infty} B_{n,m} U_{n,m}(\eta,\theta)$$

$$U_{n,m}(\eta,\theta) = Je_n(\eta,|q|_{n,m})\ ce_n(\vartheta,|q|_{n,m})$$

$$\Rightarrow B_{n,m} = \frac{\int_0^{\eta_0} d\eta \int_0^{2\pi} d\theta\ f(\eta,\theta)\left(Cosh(2\eta) - Cos(2\theta)\right) Je_n(\eta,|q|_{n,m})\ ce_n(\vartheta,|q|_{n,m})}{\int_0^{\eta_0} d\eta \int_0^{2\pi} d\theta \left(Cosh(2\eta) - Cos(2\theta)\right) Je_n{}^2(\eta,|q|_{n,m})\ ce_n{}^2(\vartheta,|q|_{n,m})}$$

$$U_{n,m}(\eta,\theta) = Jo_n(\eta,|q|_{n,m})\ se_n(\vartheta,|q|_{n,m})$$

$$\Rightarrow B_{n,m} = \frac{\int_0^{\eta_0} d\eta \int_0^{2\pi} d\theta\ f(\eta,\theta)\left(Cosh(2\eta) - Cos(2\theta)\right) Jo_n(\eta,|q|_{n,m})\ se_n(\vartheta,|q|_{n,m})}{\int_0^{\eta_0} d\eta \int_0^{2\pi} d\theta \left(Cosh(2\eta) - Cos(2\theta)\right) Jo_n{}^2(\eta,|q|_{n,m})\ se_n{}^2(\vartheta,|q|_{n,m})}$$

.

*Il est évident que pour un problème sur un cylindre creux de sections elliptiques, la même relation d'orthogonalité bidimensionnellle est acquise. Il suffit ici de faire jouer dans le caclul précédent les deux conditions homogène de Robin sur la face interne et externe. Il vient donc :*

$$\frac{\alpha_1}{\sqrt{Cosh^2(\eta_1) - Cos^2(\theta)}} \left.\frac{\partial U(\eta,\theta)}{\partial \eta}\right|_{\eta=\eta_1} + \beta_1\, U(\eta_1,\theta) = 0 \quad \frac{\alpha_2}{\sqrt{Cosh^2(\eta_2) - Cos^2(\theta)}} \left.\frac{\partial U(\eta,\theta)}{\partial \eta}\right|_{\eta=\eta_1} + \beta_2\, U(\eta_2,\theta) = 0$$

$$\Rightarrow \int_{\eta_1}^{\eta_2} d\eta \int_0^{2\pi} d\theta \left(Cosh(2\eta) - Cos(2\theta)\right) U_{n,m}(\eta,\theta) U_{p,r}(\eta,\theta) = 0 \quad si\ |q|_{n,m} \neq |q|_{p,r}$$

**Évaluation de certaines intégrales des fonctions de Mathieu angulaires et radiales à partir de leur décomposition, intégrales intervenant dans des problèmes aux limites de l'équation de Laplace**

*Nous voyons donc que dans les problèmes aux limites interviennent des intégrales bidimensionnelles :*

$$B_{n,m} = \frac{\int_0^{\eta_0} d\eta \int_0^{2\pi} d\theta \; f(\eta,\theta) \left(Cosh(2\eta) - Cos(2\theta)\right) Je_n(\eta, |q|_{n,m}) \; ce_n(\vartheta, |q|_{n,m})}{\int_0^{\eta_0} d\eta \int_0^{2\pi} d\theta \left(Cosh(2\eta) - Cos(2\theta)\right) Je_n^{\;2}(\eta, |q|_{n,m}) \; ce_n^{\;2}(\vartheta, |q|_{n,m})}$$

*ou*

$$B_{n,m} = \frac{\int_0^{\eta_0} d\eta \int_0^{2\pi} d\theta \; f(\eta,\theta) \left(Cosh(2\eta) - Cos(2\theta)\right) Jo_n(\eta, |q|_{n,m}) \; se_n(\vartheta, |q|_{n,m})}{\int_0^{\eta_0} d\eta \int_0^{2\pi} d\theta \left(Cosh(2\eta) - Cos(2\theta)\right) Jo_n^{\;2}(\eta, |q|_{n,m}) \; se_n^{\;2}(\vartheta, |q|_{n,m})}$$

*On évalue les intégrales des normes des fonctions propres en η comme suit :*

$$I_{Norm,n}^{ce,Je} = \int_0^{\eta_0} d\eta \int_0^{2\pi} d\theta \left(Cosh(2\eta) - Cos(2\theta)\right) Je_n^{\;2}\left(\eta, |q|_{n,m}\right) ce_n^{\;2}\left(\theta, |q|_{n,m}\right) =$$

$$= \int_0^{\eta_0} d\eta \int_0^{2\pi} d\theta \; Cosh(2\eta) \; Je_n^{\;2}\left(\eta, |q|_{n,m}\right) ce_n^{\;2}\left(\theta, |q|_{n,m}\right) - \int_0^{\eta_0} d\eta \int_0^{2\pi} d\theta \; Cos(2\theta) \; Je_n^{\;2}\left(\eta, |q|_{n,m}\right) ce_n^{\;2}\left(\theta, |q|_{n,m}\right) =$$

$$= \left[\int_0^{\eta_0} d\eta \, Cosh(2\eta) \; Je_n^{\;2}\left(\eta, |q|_{n,m}\right)\right]\left[\int_0^{2\pi} d\theta \;\; ce_n^{\;2}\left(\theta, |q|_{n,m}\right)\right] - \left[\int_0^{\eta_0} d\eta \; Je_n^{\;2}\left(\eta, |q|_{n,m}\right)\right]\left[\int_0^{2\pi} d\theta \; Cos(2\theta) \; ce_n^{\;2}\left(\theta, |q|_{n,m}\right)\right]$$

$$I_{Norm,n}^{ce,Je} = \pi\left(I_{Je,2,n,Cosh}^{(1)} - \Theta_n^{(2,1)} I_{Je,2,n}^{(0)}\right) \quad \textit{voir notation}$$

*et*

$$I_{Norm,n}^{se,Jo} = \int_0^{\eta_0} d\eta \int_0^{2\pi} d\theta \left(Cosh(2\eta) - Cos(2\theta)\right) Jo_n^{\;2}\left(\eta, |q|_{n,m}\right) se_n^{\;2}\left(\theta, |q|_{n,m}\right) =$$

$$= \int_0^{\eta_0} d\eta \int_0^{2\pi} d\theta \; Cosh(2\eta) \; Jo_n^{\;2}\left(\eta, |q|_{n,m}\right) se_n^{\;2}\left(\theta, |q|_{n,m}\right) - \int_0^{\eta_0} d\eta \int_0^{2\pi} d\theta \; Cos(2\theta) \; Jo_n^{\;2}(\eta, |q|_{n,m}) \; se_n^{\;2}\left(\theta, |q|_{n,m}\right) =$$

$$= \left[\int_0^{\eta_0} d\eta \, Cosh(2\eta) \; Jo_n^{\;2}\left(\eta, |q|_{n,m}\right)\right]\left[\int_0^{2\pi} d\theta \;\; se_n^{\;2}\left(\theta, |q|_{n,m}\right)\right] - \left[\int_0^{\eta_0} d\eta \; Jo_n^{\;2}\left(\eta, |q|_{n,m}\right)\right]\left[\int_0^{2\pi} d\theta \; Cos(2\theta) \; se_n^{\;2}\left(\theta, |q|_{n,m}\right)\right]$$

$$I_{Norm,n}^{se,Jo} = \pi\left(I_{Jo,2,n,Cosh}^{(1)} - \Psi_n^{(2,1)} I_{Jo,2,n}^{(0)}\right) \quad \textit{voir notation}$$

## Quelques intégrales des fonctions de Mathieu angulaires

*Dans ce qui suit on omet les indices des paramètres q de l'équation de Mathieu, sachant qu'ils sont en général dépendant et de l'ordre de la fonction de Mathieu angulaire paire ou impaires et d'un autre paramètre entier issue de la séparation de la hauteur z dans l'équation de Laplace ou Helmholtz.*

*Pour les intégrales en ϑ, on a à partir de la décomposition des fonctions de Mathieu angulaires :*

$$\Theta_{2n}^{(2,1)} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} dz\ Cos(2z)\left(ce_{2n}(z,|q|)\right)^2 = A_0^{(2n)}A_2^{(2n)} + \sum_{l=0}^{l=\infty} A_{2l}^{(2n)}A_{2l+2}^{(2n)}$$

$$\Theta_{2n+1}^{(2,1)} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} dz\ Cos(2z)\left(ce_{2n+1}(z,|q|)\right)^2 = \frac{\left(A_1^{(2n+1)}\right)^2}{2} + \sum_{l=0}^{l=\infty} A_{2l+1}^{(2n+1)}A_{2l+3}^{(2n+1)}$$

$$\Psi_{2n+1}^{(2,1)} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} dz\ Cos(2z)\left(se_{2n+1}(z,|q|)\right)^2 = -\frac{\left(B_1^{(2n+1)}\right)^2}{2} + \sum_{l=0}^{l=\infty} B_{2l+1}^{(2n+1)}B_{2l+3}^{(2n+1)}$$

$$\Psi_{2n+2}^{(2,1)} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} dz\ Cos(2z)\left(se_{2n+2}(z,|q|)\right)^2 = \sum_{l=0}^{l=\infty} B_{2l+2}^{(2n+2)}B_{2l+4}^{(2n+2)}$$

*Auquel on ajoute les intégrales de normalisation et d'orthogonalité des fonctions angulaires de Mathieu :*

*Normalisation*

$$\Theta_{2n}^{(2,0)} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} dz\left(ce_{2n}(z,|q|)\right)^2 = 2\left(A_0^{(2n)}\right)^2 + \sum_{l=0}^{l=\infty}\left(A_{2l}^{(2n)}\right)^2 = 1 \qquad \Theta_{2n+1}^{(2,0)} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} dz\left(ce_{2n+1}(z,|q|)\right)^2 = \sum_{l=0}^{l=\infty}\left(A_{2l+1}^{(2n+1)}\right)^2 = 1$$

$$\Psi_{2n+1}^{(2,0)} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} dz\left(se_{2n+1}(z,|q|)\right)^2 = \sum_{l=0}^{l=\infty}\left(B_{2l+1}^{(2n+1)}\right)^2 = 1 \qquad \Psi_{2n+2}^{(2,0)} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} dz\left(se_{2n+2}(z,|q|)\right)^2 = \sum_{l=0}^{l=\infty}\left(B_{2l+2}^{(2n+2)}\right)^2 = 1$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} dz\, ce_n(z,|q|)ce_m(z,|q|) = \delta_{m,n} \qquad \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} dz\, se_n(z,|q|)se_m(z,|q|) = \delta_{m,n} \qquad \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} dz\, ce_n(z,|q|)se_m(z,|q|) = 0$$

.

*Ce qui donne avec les notations introduites des intégrales :*

$$I_{Norm,2n}^{ce,Je} = \pi\left[\int_0^{\eta_0} d\eta\left\{Cosh(2\eta) - \Theta_{2n}^{(1)}\right\}Je_{2n}{}^2(\eta,|q|)\right] \quad et \quad I_{Norm,2n+1}^{ce,Je} = \pi\left[\int_0^{\eta_0} d\eta\left\{Cosh(2\eta) - \Theta_{2n+1}^{(1)}\right\}Je_{2n+1}{}^2(\eta,|q|)\right]$$

$$I_{Norm,2n+1}^{se,Jo} = \pi\left[\int_0^{\eta_0} d\eta\left\{Cosh(2\eta) - \Psi_{2n+1}^{(1)}\right\}Jo_{2n+1}{}^2(\eta,|q|)\right] \quad et \quad I_{Norm,2n+2}^{se,Jo} = \pi\left[\int_0^{\eta_0} d\eta\left\{Cosh(2\eta) - \Psi_{2n+2}^{(1)}\right\}Jo_{2n+2}{}^2(\eta,|q|)\right]$$

$$\Rightarrow I_{Norm,2n}^{ce,Je} = \pi\left[\int_0^{\eta_0} d\eta\, Cosh(2\eta)\, Je_{2n}{}^2(\eta,|q|) - \Theta_{2n}^{(1)}\int_0^{\eta_0} d\eta\ Je_{2n}{}^2(\eta,|q|)\right] = \pi\left(I_{Je,2,2n,Cosh}^{(1)} - \Theta_{2n}^{(2,1)}I_{Je,2,2n}^{(0)}\right)$$

$$\Rightarrow I_{Norm,2n+1}^{ce,Je} = \pi\left[\int_0^{\eta_0} d\eta\, Cosh(2\eta)\, Je_{2n}{}^2(\eta,|q|) - \Theta_{2n+1}^{(1)}\int_0^{\eta_0} d\eta\ Je_{2n+1}{}^2(\eta,|q|)\right] = \pi\left(I_{Je,2,2n+1,Cosh}^{(1)} - \Theta_{2n+1}^{(2,1)}I_{Je,2,2n+1}^{(0)}\right)$$

$$\Rightarrow I_{Norm,2n+1}^{se,Jo} = \pi\left[\int_0^{\eta_0} d\eta\, Cosh(2\eta)\, Jo_{2n+1}{}^2(\eta,|q|) - \Psi_{2n+1}^{(1)}\int_0^{\eta_0} d\eta\ Jo_{2n+1}{}^2(\eta,|q|)\right] = \pi\left(I_{Jo,2,2n+1,Cosh}^{(1)} - \Psi_{2n+1}^{(2,1)}I_{Jo,2,2n+1}^{(0)}\right)$$

$$\Rightarrow I_{Norm,2n+2}^{se,Jo} = \pi\left[\int_0^{\eta_0} d\eta\, Cosh(2\eta)\, Jo_{2n+2}{}^2(\eta,|q|) - \Psi_{2n+2}^{(1)}\int_0^{\eta_0} d\eta\ Jo_{2n+2}{}^2(\eta,|q|)\right] = \pi\left(I_{Jo,2,2n+2,Cosh}^{(1)} - \Psi_{2n+2}^{(2,1)}I_{Jo,2,2n+2}^{(0)}\right)$$

*On a également les intégrales suivantes (voir A.P.Prudnikov, Yu.A.Brychkov, O.I.Marichev Integrals and Series - Volume 3 - More Special Functions, édition en russe, section 2.27.6).*

$$\int_0^{2\pi} dz\, ce_n\left(z,|q|\right)\frac{dce_m\left(z,|q|\right)}{dz} = 0 \quad \int_0^{2\pi} dz\, se_n\left(z,|q|\right)\frac{dse_m\left(z,|q|\right)}{dz} = 0$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} dz\, ce_{2m}\left(z,|q|\right)\frac{dse_{2n+2}\left(z,|q|\right)}{dz} = \sum_{l=0}^{l=\infty} 2lA_{2l}^{(2m)}B_{2l+2}^{(2n+2)} \quad \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} dz\, \frac{dce_{2m}\left(z,|q|\right)}{dz} se_{2n+2}\left(z,|q|\right) = -\sum_{l=0}^{l=\infty} 2lA_{2l}^{(2m)}B_{2l+2}^{(2n+2)}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} dz\, ce_{2m+1}\left(z,|q|\right)\frac{dse_{2n+1}\left(z,|q|\right)}{dz} = \sum_{l=0}^{l=\infty} (2l+1)A_{2l+1}^{(2m+1)}B_{2l+1}^{(2n+1)}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} dz\, \frac{dce_{2m+1}\left(z,|q|\right)}{dz} se_{2n+1}\left(z,|q|\right) = -\sum_{l=0}^{l=\infty} (2l+1)A_{2l+1}^{(2m+1)}B_{2l+1}^{(2n+1)}$$

.

*D'autres intégrales des fonctions angulaires sont faciles à calculer à l'aide des décompositions:*

$$\begin{cases} ce_{2n}(z,q) = \sum_{l=0}^{l=\infty} A_{2l}^{(2n)} Cos(2l\, z) \quad ce_{2n+1}(z,q) = \sum_{l=0}^{l=\infty} A_{2l+1}^{(2n+1)} Cos((2l+1)z) \\ se_{2n+1}(z,q) = \sum_{l=0}^{l=\infty} B_{2l+1}^{(2n+1)} Sin((2l+1)z) \quad se_{2n+2}(z,q) = \sum_{l=0}^{l=\infty} B_{2l+2}^{(2n+2)} Sin((2l+2)z) \end{cases}$$

$$\Theta_{2n}^{(1,0)} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} dz\, ce_{2n}\left(z,|q|\right) = 2A_0^{(2n)} \quad \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} dz\, ce_{2n}\left(z,|q|\right) = \frac{\Theta_{2n}^{(1,0)}}{2} = A_0^{(2n)} \quad \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} dz\, ce_{2n}\left(z,|q|\right) = \frac{\Theta_{2n}^{(1,0)}}{4} = \frac{A_0^{(2n)}}{2}$$

$$\Theta_{2n}^{(1,1)} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} dz\, Cos(2z) ce_{2n}\left(z,|q|\right) = A_2^{(2n)} \quad \int_0^{\pi} dz\, Cos(2z) ce_{2n}\left(z,|q|\right) = \frac{\pi A_2^{(2n)}}{2} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} dz\, Cos(2z) ce_{2n}\left(z,|q|\right) = \frac{\pi A_2^{(2n)}}{4}$$

$$\int_0^{2\pi} dz\, Cos(2z) ce_n\left(z,|q|\right)\frac{dce_n\left(z,|q|\right)}{dz} = 0 \quad \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} dz\, ce_{2n+1}\left(z,|q|\right) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} dz\, ce_{2n+1}\left(z,|q|\right) = 0$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} dz\, Cos(2z) ce_{2n+1}\left(z,|q|\right) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} dz\, Cos(2z) ce_{2n+1}\left(z,|q|\right) = 0 \quad \int_0^{2\pi} dz\, se_{2n+1}\left(z,|q|\right) = 0$$

$$\int_0^{2\pi} dz\, Cos(2z) se_{2n+1}\left(z,|q|\right) = 0 \quad \int_0^{2\pi} dz\, Cos(2z) se_n\left(z,|q|\right)\frac{dse_n\left(z,|q|\right)}{dz} = 0$$

$$\int_0^{2\pi} dz\, se_{2n+2}\left(z,|q|\right) = 0 \quad \int_0^{\pi} dz\, se_{2n+2}\left(z,|q|\right) = 0 \quad \int_0^{2\pi} dz\, Cos(2z) se_{2n+2}\left(z,|q|\right) = 0$$

$$\int_0^{\pi} dz\, Cos(2z) se_{2n+2}\left(z,|q|\right) = 0 \quad \int_0^{2\pi} dz\, Sin(2z)\left(ce_n\left(z,|q|\right)\right)^2 = 0 \quad \int_0^{2\pi} dz\, Sin(2z)\left(se_n\left(z,|q|\right)\right)^2 = 0$$

.

*Les intégrales suivantes sont non nulles :*

$$\Theta_{2n+1}^{(1,0)} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} dz\, ce_{2n+1}(z,|q|) = \frac{1}{\pi}\sum_{l=0}^{l=\infty} A_{2l+1}^{(2n+1)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} dz\, Cos((2l+1)z) = \frac{1}{\pi}\sum_{l=0}^{l=\infty} \frac{(-1)^l A_{2l+1}^{(2n+1)}}{2l+1}$$

$$\Theta_{2n+1}^{(1,1)} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} dz\, Cos(2z) ce_{2n+1}(z,|q|) = \frac{1}{\pi}\sum_{l=0}^{l=\infty} A_{2l+1}^{(2n+1)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} dz\, Cos(2z) Cos((2l+1)z) = \frac{1}{\pi}\sum_{l=0}^{l=\infty} \frac{(-1)^{l+1} A_{2l+1}^{(2n+1)}}{(2l-1)(2l+3)}$$

$$\Psi_{2n+1}^{(1,0)} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} dz\, se_{2n+1}(z,|q|) = \frac{1}{\pi}\sum_{l=0}^{l=\infty} B_{2l+1}^{(2n+1)} \int_0^{\pi} dz\, Sin((2l+1)z) = \frac{1}{\pi}\sum_{l=0}^{l=\infty} \frac{2B_{2l+1}^{(2n+1)}}{2l+1}$$

$$\Psi_{2n+1}^{(1,1)} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} dz\, Cos(2z) se_{2n+1}(z,|q|) = \frac{1}{\pi}\sum_{l=0}^{l=\infty} B_{2l+1}^{(2n+1)} \int_0^{\pi} dz\, \{Sin((2l+1)z) Cos(2z)\} = \frac{1}{\pi}\sum_{l=0}^{l=\infty} \frac{2(2l+1) B_{2l+1}^{(2n+1)}}{(2l+3)(2l-1)}$$

$$\Psi_{2n+2}^{(1,0)} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} dz\, se_{2n+2}(z,|q|) = \frac{1}{\pi}\sum_{l=0}^{l=\infty} B_{2l+2}^{(2n+2)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} dz\, Sin((2l+2)z) = \frac{1}{\pi}\sum_{l=0}^{l=\infty} \frac{\left(1+(-1)^l\right) B_{2l+2}^{(2n+1)}}{2(2l+1)}$$

$$\Psi_{2n+2}^{(1,1)} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} dz\, Cos(2z) se_{2n+2}(z,|q|) = \frac{1}{\pi}\sum_{l=0}^{l=\infty} B_{2l+2}^{(2n+2)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} dz\, Sin((2l+2)z) Cos(2z) = \frac{1}{\pi}\sum_{l=0}^{l=\infty} \frac{\left(1-(-1)^l\right)(l+1) B_{2l+2}^{(2n+1)}}{2l(l+2)}$$

*Plus généralement les intégrales suivantes sont calculées ainsi :*

$$\Theta_{2n}^{(2,p)} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} dz\, Cos(2p\,z)\left(ce_{2n}(z,|q|)\right)^2 = \begin{cases} A_0^{(2n)}A_2^{(2n)} + \sum_{l=0}^{l=\infty} A_{2l}^{(2n)}A_{2l+2}^{(2n)} & si \quad p=1 \\ \sum_{l=0}^{l=\frac{1}{2}(p-1)} A_{2l}^{(2n)}A_{2p-2l}^{(2n)} + \sum_{l=0}^{l=\infty} A_{2l}^{(2n)}A_{2p+2l}^{(2n)} & si \quad p\ impair \geq 3 \\ \frac{\left(A_p^{(2n)}\right)^2}{2} + \sum_{l=0}^{l=\frac{1}{2}(p-2)} A_{2l}^{(2n)}A_{2p-2l}^{(2n)} + \sum_{l=0}^{l=\infty} A_{2l}^{(2n)}A_{2p+2l}^{(2n)} & si \quad p\ pair \end{cases}$$

$$\Theta_{2n+1}^{(2,p)} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} dz\, Cos(2p\,z)\left(ce_{2n+1}(z,|q|)\right)^2 = \begin{cases} \sum_{l=0}^{l=\frac{1}{2}(p-2)} A_{2l+1}^{(2n+1)}A_{2p-2l-1}^{(2n+1)} + \sum_{l=0}^{l=\infty} A_{2l+1}^{(2n+1)}A_{2p+2l+1}^{(2n+1)} & si \quad p\ pair \\ \frac{\left(A_1^{(2n+1)}\right)^2}{2} + \sum_{l=0}^{l=\infty} A_{2l+1}^{(2n+1)}A_{2l+3}^{(2n+1)} & si \quad p=1 \\ \frac{\left(A_p^{(2n+1)}\right)^2}{2} + \sum_{l=0}^{l=\frac{1}{2}(p-3)} A_{2l+1}^{(2n+1)}A_{2p-2l-1}^{(2n+1)} + \sum_{l=0}^{l=\infty} A_{2l+1}^{(2n+1)}A_{2p+2l+1}^{(2n+1)} & si \quad p\ impair \geq 3 \end{cases}$$

$$\Psi_{2n+1}^{(2,p)} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} dz\, Cos(2p\,z)\left(se_{2n+1}(z,|q|)\right)^2 = \begin{cases} -\frac{\left(B_1^{(2n+1)}\right)^2}{2} + \sum_{l=0}^{l=\infty} B_{2l+1}^{(2n+1)}B_{2l+3}^{(2n+1)} & si \quad p=1 \\ -\sum_{l=0}^{l=\frac{1}{2}(p-2)} B_{2l+1}^{(2n+1)}B_{2p-2l-1}^{(2n+1)} + \sum_{l=0}^{l=\infty} B_{2l+1}^{(2n+1)}B_{2p+2l+1}^{(2n+1)} & si \quad p\ pair \\ -\frac{\left(B_p^{(2n+1)}\right)^2}{2} - \sum_{l=0}^{l=\frac{1}{2}(p-3)} B_{2l+1}^{(2n+1)}B_{2p-2l-1}^{(2n+1)} + \sum_{l=0}^{l=\infty} B_{2l+1}^{(2n+1)}B_{2p+2l+1}^{(2n+1)} & si \quad p\ impair \geq 3 \end{cases}$$

$$\Psi_{2n+2}^{(2,p)} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} dz\, Cos(2p\,z)\left(se_{2n+2}(z,|q|)\right)^2 = \begin{cases} \sum_{l=0}^{l=\infty} B_{2l+2}^{(2n+2)}B_{2l+4}^{(2n+2)} & si \quad p=1 \\ -\sum_{l=0}^{l=\frac{1}{2}(p-3)} B_{2l+2}^{(2n+2)}B_{2p-2l-2}^{(2n+2)} + \sum_{l=0}^{l=\infty} B_{2l+2}^{(2n+2)}B_{2p+2l+2}^{(2n+2)} & si \quad p\ impair \geq 3 \\ -\frac{\left(B_p^{(2n+2)}\right)^2}{2} + \sum_{l=0}^{l=\infty} B_{2l+2}^{(2n+2)}B_{2p+2l+2}^{(2n+2)} & si \quad p=2 \\ -\frac{\left(B_p^{(2n+2)}\right)^2}{2} - \sum_{l=0}^{l=\frac{1}{2}(p-4)} B_{2l+2}^{(2n+2)}B_{2p-2l-2}^{(2n+2)} + \sum_{l=0}^{l=\infty} B_{2l+2}^{(2n+2)}B_{2p+2l+2}^{(2n+2)} & si \quad p\ pair \geq 4 \end{cases}$$

.

*Passons à cette catégorie d'intégrales que l'on peut rencontrer notamment dans des problèmes aux limites d'équation de la chaleur en régime transitoire pour la recherche des valeurs propres pour des conditions homogènes de Robin (voir articles de K.SATO, « Heat conduction in Infinite Elliptical cylinder during heating or cooling », 2006 et K.SATO, « Transient Heat conduction in Infinite Hollow Confocal Elliptical cylinder », 2007) :*

$$\Theta_{2p,2n}^{(2,j)}(q)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}d\theta Cos(2j\theta)ce_{2p}(\theta,q)\,ce_{2n}(\theta,q)=\frac{1}{2}\sum_{l=0}^{l=\infty}A_{2l}^{(2p)}(q)\left\{A_{2(l+j)}^{(2n)}(q)\left(1+\delta_{l+j,0}\right)+A_{2|l-j|}^{(2n)}(q)\left(1+\delta_{|l-j|,0}\right)\right\}$$

*Avec Indice de Kronecker* $\delta_{i,j}=1$ *si* $i=j$ *et* $ce_{2n}(\theta,q)=\sum_{l=0}^{l=\infty}A_{2l}^{(2n)}(q)Cos(2l\theta)$

*Démontrons cette formule :*

$$\Theta_{2p,2n}^{(2,j)}(q)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}d\theta Cos(2j\theta)ce_{2p}(\theta,q)\,ce_{2n}(\theta,q)=\frac{1}{2}\sum_{l=0}^{l=\infty}A_{2l}^{(2p)}(q)\left\{A_{2(l+j)}^{(2n)}(q)\left(1+\delta_{l+j,0}\right)+A_{2|l-j|}^{(2n)}(q)\left(1+\delta_{|l-j|,0}\right)\right\}$$

*Il suffit de substituer les développements de Fourier des fonctions de Mathieu et de considérer la linéarisation du produit des cosinus. Les seuls termes qui ne s'annulent pas dans l'intégration sont les termes constants , soit les termes qui s'annulent dans la linéarisation du produit des cosinus.*

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}d\theta Cos(2j\theta)ce_{2p}(\theta,q)\,ce_{2n}(\theta,q)=\frac{1}{\pi}\sum_{l_1=0}^{l_1=\infty}\sum_{l_2=0}^{l_2=\infty}A_{2l_1}^{(2p)}(q)A_{2l_2}^{(2n)}(q)\int_0^{2\pi}d\theta Cos(2j\theta)Cos(2l_1\theta)Cos(2l_2\theta)$$

*Comme* $Cos(2j\theta)Cos(2l_1\theta)Cos(2l_2\theta)=\frac{1}{4}\left\{Cos((2(j-l_1-l_2)\theta))+Cos((2(j-l_1+l_2)\theta))+Cos((2(j+l_1-l_2)\theta))+Cos((2(j+l_1+l_2)\theta))\right\}$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}d\theta Cos(m\theta)=2\delta_{|m|,0}\Rightarrow\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}d\theta Cos(2j\theta)Cos(2l_1\theta)Cos(2l_2\theta)=\frac{\delta_{|j-l_1-l_2|,0}+\delta_{|j-l_1+l_2|,0}+\delta_{|j+l_1-l_2|,0}+\delta_{|j+l_1+l_2|,0}}{2}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\sum_{l_1=0}^{l_1=\infty}\sum_{l_2=0}^{l_2=\infty}A_{2l_1}^{(2p)}(q)A_{2l_2}^{(2n)}(q)\delta_{|j+l_1+l_2|,0}=A_0^{(2p)}(q)A_0^{(2n)}=\sum_{l=0}^{l=\infty}A_{2l}^{(2p)}(q)A_{2(l+j)}^{(2n)}(q)\delta_{l+j,0}\\ \sum_{l_1=0}^{l_1=\infty}\sum_{l_2=0}^{l_2=\infty}A_{2l_1}^{(2p)}(q)A_{2l_2}^{(2n)}(q)\delta_{|j+l_1-l_2|,0}=\sum_{l=0}^{l=\infty}A_{2l}^{(2p)}(q)A_{2(l+j)}^{(2n)}(q)\\ \sum_{l_1=0}^{l_1=\infty}\sum_{l_2=0}^{l_2=\infty}A_{2l_1}^{(2p)}(q)A_{2l_2}^{(2n)}(q)\delta_{|j-l_1-l_2|,0}=\sum_{l=0}^{l=j}A_{2l}^{(2p)}(q)A_{2|j-l|}^{(2n)}(q)=\sum_{l=0}^{l=j-1}A_{2l}^{(2p)}(q)A_{2|j-l|}^{(2n)}(q)+A_{2j}^{(2p)}(q)A_0^{(2n)}(q)\\ =\sum_{l=0}^{l=j-1}A_{2l}^{(2p)}(q)A_{2|j-l|}^{(2n)}(q)+\sum_{l=0}^{l=\infty}A_{2l}^{(2p)}A_{2|l-j|}^{(2n)}(q)\delta_{|l-j|,0}\\ \sum_{l_1=0}^{l_1=\infty}\sum_{l_2=0}^{l_2=\infty}A_{2l_1}^{(2p)}(q)A_{2l_2}^{(2n)}(q)\delta_{|j-l_1+l_2|,0}=\sum_{l=0}^{l=\infty}A_{2(l+j)}^{(2p)}(q)A_{2l}^{(2n)}(q)=\sum_{l=j}^{l=\infty}A_{2l}^{(2p)}(q)A_{2|l-j|}^{(2n)}(q)\end{cases}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}d\theta Cos(2j\theta)ce_{2p}(\theta,q)\,ce_{2n}(\theta,q)=\frac{1}{2}\sum_{l=0}^{l=\infty}A_{2l}^{(2p)}(q)\left\{A_{2(l+j)}^{(2n)}(q)\left(1+\delta_{l+j,0}\right)+A_{2|l-j|}^{(2n)}(q)\left(1+\delta_{|l-j|,0}\right)\right\}$$

$$\Rightarrow\Theta_{2p,2n}^{(2,j)}(q)=\frac{1}{2}\sum_{l=0}^{l=\infty}A_{2l}^{(2p)}(q)\left\{A_{2(l+j)}^{(2n)}(q)\left(1+\delta_{l+j,0}\right)+A_{2|l-j|}^{(2n)}(q)\left(1+\delta_{|l-j|,0}\right)\right\}$$

*Comme par ailleurs, selon une formule due à N.N.Lebedev :*

$$\frac{1}{\sqrt{Cosh(2\eta)-Cos(2\theta)}}=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\sum_{j=0}^{j=\infty}\frac{Q_{j-\frac{1}{2}}(Cosh(2\eta))}{(1+\partial_{j,0})}Cos(2j\theta)$$

*Il vient :* $I^{c}_{2p,2n}(\eta,q)=\frac{1}{\pi}\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}d\theta\frac{ce_{2p}(\theta,q)ce_{2n}(\theta,q)}{\sqrt{Cosh(2\eta)-Cos(2\theta)}}=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\sum_{j=0}^{j=\infty}\frac{Q_{j-\frac{1}{2}}(Cosh(2\eta))}{(1+\partial_{j,0})}\Theta^{(2,j)}_{2p,2n}(q)$

*Soit maintenant les intégrales suivantes :*

$$I^{s}_{2p,2n}(\eta,q)=\frac{1}{\pi}\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}d\theta\frac{se_{2p}(\theta,q)se_{2n}(\theta,q)}{\sqrt{Cosh(2\eta)-Cos(2\theta)}}=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\sum_{j=0}^{j=\infty}\frac{Q_{j-\frac{1}{2}}(Cosh(2\eta))}{(1+\partial_{j,0})}\Psi^{(2,j)}_{2p,2n}(q)\quad pour\quad p,n>0$$

$$\Psi^{(2,j)}_{2p,2n}(q)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi}d\theta Cos(2j\theta)se_{2p}(\theta,q)se_{2n}(\theta,q)$$

*Nous avons :*

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi}d\theta Cos(2j\theta)se_{2p}(\theta,q)\,se_{2n}(\theta,q)=\frac{1}{\pi}\sum_{l_1=1}^{l_1=\infty}\sum_{l_2=1}^{l_2=\infty}B^{(2p)}_{2l_1}(q)B^{(2n)}_{2l_2}(q)\int_{0}^{2\pi}d\theta Cos(2j\theta)Sin(2l_1\theta)Sin(2l_2\theta)$$

*Comme* $Cos(2j\theta)Sin(2l_1\theta)Sin(2l_2\theta)=\frac{1}{4}\{Cos((2(j-l_1+l_2)\theta))+Cos((2(j+l_1-l_2)\theta))-Cos((2(j-l_1-l_2)\theta))-Cos((2(j+l_1+l_2)\theta))\}$

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi}d\theta Cos(m\theta)=2\delta_{|m|,0}\Rightarrow\frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi}d\theta Cos(2j\theta)Sin(2l_1\theta)Sin(2l_2\theta)=\frac{\delta_{|j-l_1+l_2|,0}+\delta_{|j+l_1-l_2|,0}-\delta_{|j-l_1-l_2|,0}-\delta_{|j+l_1+l_2|,0}}{2}$$

$$\Rightarrow\Psi^{(2,j)}_{2p,2n}(q)=\frac{1}{2}\sum_{l_1=1}^{l_1=\infty}\sum_{l_2=1}^{l_2=\infty}B^{(2p+1)}_{2l_1}(q)B^{(2n+1)}_{2l_2}(q)\left(\delta_{|j-l_1+l_2|,0}+\delta_{|j+l_1-l_2|,0}-\delta_{|j-l_1-l_2|,0}-\delta_{|j+l_1+l_2|,0}\right)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\sum_{l_1=1}^{l_1=\infty}\sum_{l_2=1}^{l_2=\infty}B^{(2p)}_{2l_1}(q)B^{(2n)}_{2l_2}(q)\delta_{|j+l_1+l_2|,0}=0\\ \sum_{l_1=1}^{l_1=\infty}\sum_{l_2=1}^{l_2=\infty}B^{(2p)}_{2l_1}(q)B^{(2n)}_{2l_2}(q)\delta_{|j+l_1-l_2|,0}=\sum_{l=1}^{l=\infty}B^{(2p)}_{2l}(q)B^{(2n)}_{2(l+j)}(q)\\ \sum_{l_1=1}^{l_1=\infty}\sum_{l_2=1}^{l_2=\infty}B^{(2p)}_{2l_1}(q)B^{(2n)}_{2l_2}(q)\delta_{|j-l_1-l_2|,0}=\sum_{l=1}^{l=j-1}B^{(2p)}_{2l}(q)B^{(2n)}_{2(j-l)}(q)\\ \sum_{l_1=0}^{l_1=\infty}\sum_{l_2=0}^{l_2=\infty}B^{(2p)}_{2l_1}(q)B^{(2n)}_{2l_2}(q)\delta_{|j-l_1+l_2|,0}=\sum_{l=1}^{l=\infty}B^{(2p)}_{2(l+j)}(q)B^{(2n)}_{2l}(q)\end{cases}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi}d\theta Cos(2j\theta)se_{2p}(\theta,q)\,se_{2n}(\theta,q)=\frac{1}{2}\left\{\sum_{l=1}^{l=\infty}\left[B^{(2p)}_{2l}(q)B^{(2n)}_{2(l+j)}(q)+B^{(2p)}_{2(l+j)}(q)B^{(2n)}_{2l}(q)\right]-\sum_{l=1}^{l=j-1}B^{(2p)}_{2l}(q)B^{(2n)}_{2(j-l)}(q)\right\}$$

*Il vient donc :*

$$\Psi^{(2,j)}_{2p,2n}(q)=\frac{1}{2}\left\{\sum_{l=1}^{l=\infty}\left[B^{(2p)}_{2l}(q)B^{(2n)}_{2(l+j)}(q)+B^{(2p)}_{2(l+j)}(q)B^{(2n)}_{2l}(q)\right]-\sum_{l=1}^{l=j-1}B^{(2p)}_{2l}(q)B^{(2n)}_{2(j-l)}(q)\right\}$$

$$I^{s}_{2p,2n}(\eta,q)=\frac{1}{\pi}\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}d\theta\frac{se_{2p}(\theta,q)se_{2n}(\theta,q)}{\sqrt{Cosh(2\eta)-Cos(2\theta)}}=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\sum_{j=0}^{j=\infty}\frac{Q_{j-\frac{1}{2}}(Cosh(2\eta))}{(1+\partial_{j,0})}\Psi^{(2,j)}_{2p,2n}(q)\quad pour\quad p,n>0$$

*De même pour les intégrales suivantes :*

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} d\theta Cos(2j\theta) ce_{2p+1}(\theta,q)\, ce_{2n+1}(\theta,q) = \frac{1}{\pi}\sum_{l_1=0}^{l_1=\infty}\sum_{l_2=0}^{l_2=\infty} A_{2l_1+1}^{(2p+1)}(q) A_{2l_2+1}^{(2n+1)}(q)\int_0^{2\pi} d\theta Cos(2j\theta) Cos((2l_1+1)\theta) Cos((2l_2+1)\theta)$$

$$Cos(2j\theta)Cos((2l_1+1)\theta)Cos((2l_2+1)\theta) = \frac{1}{4}\{Cos((2(j-l_1-l_2-1)\theta)) + Cos((2(j-l_1+l_2)\theta)) + Cos((2(j+l_1-l_2)\theta)) + Cos((2(j+l_1+l_2+1)\theta))\}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} d\theta Cos(m\theta) = 2\delta_{|m|,0} \Rightarrow \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} d\theta Cos(2j\theta)Cos((2l_1+1)\theta)Cos((2l_2+1)\theta) = \frac{\delta_{|j-l_1-l_2-1|,0} + \delta_{|j-l_1+l_2|,0} + \delta_{|j+l_1-l_2|,0} + \delta_{|j+l_1+l_2+1|,0}}{2}$$

$$\Rightarrow \Theta_{2p+1,2n+1}^{(2,j)}(q) = \frac{1}{2}\sum_{l_1=0}^{l_1=\infty}\sum_{l_2=0}^{l_2=\infty} A_{2l_1+1}^{(2p+1)}(q) A_{2l_2+1}^{(2n+1)}(q)\left(\delta_{|j-l_1-l_2-1|,0} + \delta_{|j-l_1+l_2|,0} + \delta_{|j+l_1-l_2|,0} + \delta_{|j+l_1+l_2+1|,0}\right)$$

$$\begin{cases} \sum_{l_1=0}^{l_1=\infty}\sum_{l_2=0}^{l_2=\infty} A_{2l_1+1}^{(2p+1)}(q) A_{2l_2+1}^{(2n+1)}(q)\delta_{|j+l_1+l_2+1|,0} = 0 \\ \sum_{l_1=0}^{l_1=\infty}\sum_{l_2=0}^{l_2=\infty} A_{2l_1+1}^{(2p+1)}(q) A_{2l_2+1}^{(2n+1)}(q)\delta_{|j+l_1-l_2|,0} = \sum_{l=0}^{l=\infty} A_{2l+1}^{(2p+1)}(q) A_{2(l+j)+1}^{(2n+1)}(q) \\ \sum_{l_1=0}^{l_1=\infty}\sum_{l_2=0}^{l_2=\infty} A_{2l_1+1}^{(2p+1)}(q) A_{2l_2+1}^{(2n+1)}(q)\delta_{|j-l_1-l_2-1|,0} = \sum_{l=0}^{l=j-1} A_{2l+1}^{(2p+1)}(q) A_{2(j-l-1)+1}^{(2n+1)}(q) \\ \sum_{l_1=0}^{l_1=\infty}\sum_{l_2=0}^{l_2=\infty} A_{2l_1+1}^{(2p+1)}(q) A_{2l_2+1}^{(2n+1)}(q)\delta_{|j-l_1+l_2|,0} = \sum_{l=0}^{l=\infty} A_{2(l+j)+1}^{(2p+1)}(q) A_{2l+1}^{(2n+1)}(q) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} d\theta Cos(2j\theta) ce_{2p+1}(\theta,q)\, ce_{2n+1}(\theta,q) = \frac{1}{2}\left(\sum_{l=0}^{l=\infty}\left[A_{2l+1}^{(2p+1)}(q) A_{2(l+j)+1}^{(2n+1)}(q) + A_{2(l+j)+1}^{(2p+1)}(q) A_{2l+1}^{(2n+1)}(q)\right] + \sum_{l=0}^{l=j-1} A_{2l+1}^{(2p+1)}(q) A_{2(j-l)-1}^{(2n+1)}(q)\right)$$

$$\Rightarrow \Theta_{2p+1,2n+1}^{(2,j)}(q) = \frac{1}{2}\left(\sum_{l=0}^{l=\infty}\left[A_{2l+1}^{(2p+1)}(q) A_{2(l+j)+1}^{(2n+1)}(q) + A_{2(l+j)+1}^{(2p+1)}(q) A_{2l+1}^{(2n+1)}(q)\right] + \sum_{l=0}^{l=j-1} A_{2l+1}^{(2p+1)}(q) A_{2(j-l)-1}^{(2n+1)}(q)\right)$$

*D'où l'expression de l'intégrale suivante :*

$$\Theta_{2p+1,2n+1}^{(2,j)}(q) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} d\theta Cos(2j\theta) ce_{2p+1}(\theta,q) ce_{2n+1}(\theta,q) = \frac{1}{2}\left(\sum_{l=0}^{l=\infty}\left[A_{2l+1}^{(2p+1)}(q) A_{2(l+j)+1}^{(2n+1)}(q) + A_{2(l+j)+1}^{(2p+1)}(q) A_{2l+1}^{(2n+1)}(q)\right] + \sum_{l=0}^{l=j-1} A_{2l+1}^{(2p+1)}(q) A_{2(j-l)-1}^{(2n+1)}(q)\right)$$

$$I_{2p+1,2n+1}^{c}(\eta,q) = \frac{1}{\pi}\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} d\theta \frac{ce_{2p+1}(\theta,q) ce_{2n+1}(\theta,q)}{\sqrt{Cosh(2\eta) - Cos(2\theta)}} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\sum_{j=0}^{j=\infty}\frac{Q_{j-\frac{1}{2}}(Cosh(2\eta))}{(1+\partial_{j,0})}\Theta_{2p+1,2n+1}^{(2,j)}(q)$$

.

*Et de même pour les intégrales suivantes :*

$$I^{s}_{2p+1,2n+1}(\eta,q)=\frac{1}{\pi}\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}d\theta\,\frac{se_{2p+1}(\theta,q)se_{2n+1}(\theta,q)}{\sqrt{Cosh(2\eta)-Cos(2\theta)}}=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\sum_{j=0}^{j=\infty}\frac{Q_{j-\frac{1}{2}}(Cosh(2\eta))}{(1+\partial_{j,0})}\Psi^{(2,j)}_{2p+1,2n+1}(q)$$

$$\Psi^{(2,j)}_{2p+1,2n+1}(q)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi}d\theta Cos(2j\theta)se_{2p+1}(\theta,q)se_{2n+1}(\theta,q)$$

*Nous avons :*

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi}d\theta Cos(2j\theta)se_{2p+1}(\theta,q)\,se_{2n+1}(\theta,q)=\frac{1}{\pi}\sum_{l_1=0}^{l_1=\infty}\sum_{l_2=0}^{l_2=\infty}B^{(2p+1)}_{2l_1+1}(q)B^{(2n+1)}_{2l_2+1}(q)\int_{0}^{2\pi}d\theta Cos(2j\theta)Sin((2l_1+1)\theta)Sin((2l_2+1)\theta)$$

$$Cos(2j\theta)Sin((2l_1+1)\theta)Sin((2l_2+1)\theta)=\frac{1}{4}\{Cos((2(j-l_1+l_2)\theta))+Cos((2(j+l_1-l_2)\theta))-Cos((2(j-l_1-l_2-1)\theta))-Cos((2(j+l_1+l_2+1)\theta))\}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi}d\theta Cos(m\theta)=2\delta_{|m|,0}\Rightarrow\frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi}d\theta Cos(2j\theta)Sin((2l_1+1)\theta)Sin((2l_2+1)\theta)=\frac{\delta_{|j-l_1+l_2|,0}+\delta_{|j+l_1-l_2|,0}-\delta_{|j-l_1-l_2-1|,0}-\delta_{|j+l_1+l_2+1|,0}}{2}$$

$$\Rightarrow\Psi^{(2,j)}_{2p+1,2n+1}(q)=\frac{1}{2}\sum_{l_1=0}^{l_1=\infty}\sum_{l_2=0}^{l_2=\infty}B^{(2p+1)}_{2l_1+1}(q)B^{(2n+1)}_{2l_2+1}(q)\left(\delta_{|j-l_1+l_2|,0}+\delta_{|j+l_1-l_2|,0}-\delta_{|j-l_1-l_2-1|,0}-\delta_{|j+l_1+l_2+1|,0}\right)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\sum_{l_1=0}^{l_1=\infty}\sum_{l_2=0}^{l_2=\infty}B^{(2p+1)}_{2l_1+1}(q)B^{(2n+1)}_{2l_2+1}(q)\delta_{|j+l_1+l_2+1|,0}=0\\ \sum_{l_1=0}^{l_1=\infty}\sum_{l_2=0}^{l_2=\infty}B^{(2p+1)}_{2l_1+1}(q)B^{(2n+1)}_{2l_2+1}(q)\delta_{|j+l_1-l_2|,0}=\sum_{l=0}^{l=\infty}B^{(2p+1)}_{2l+1}(q)B^{(2n+1)}_{2(l+j)+1}(q)\\ \sum_{l_1=0}^{l_1=\infty}\sum_{l_2=0}^{l_2=\infty}B^{(2p+1)}_{2l_1+1}(q)B^{(2n+1)}_{2l_2+1}(q)\delta_{|j-l_1-l_2-1|,0}=\sum_{l=0}^{l=j-1}B^{(2p)}_{2l+1}(q)B^{(2n)}_{2(j-1-l)+1}(q)\\ \sum_{l_1=0}^{l_1=\infty}\sum_{l_2=0}^{l_2=\infty}B^{(2p+1)}_{2l_1+1}(q)B^{(2+1n)}_{2l_2+1}(q)\delta_{|j-l_1+l_2|,0}=\sum_{l=0}^{l=\infty}B^{(2p+1)}_{2(l+j)+1}(q)B^{(2n+1)}_{2l+1}(q)\end{cases}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi}d\theta Cos(2j\theta)se_{2p}(\theta,q)\,se_{2n}(\theta,q)=\frac{1}{2}\left\{\sum_{l=0}^{l=\infty}\left[B^{(2p+1)}_{2l+1}(q)B^{(2n+1)}_{2(l+j)+1}(q)+B^{(2p+1)}_{2(l+j)+1}(q)B^{(2n+1)}_{2l+1}(q)\right]-\sum_{l=0}^{l=j-1}B^{(2p)}_{2l+1}(q)B^{(2n)}_{2(j-1-l)+1}(q)\right\}$$

*Il vient donc :*

$$\Psi^{(2,j)}_{2p+1,2n+1}(q)=\frac{1}{2}\left\{\sum_{l=0}^{l=\infty}\left[B^{(2p+1)}_{2l+1}(q)B^{(2n+1)}_{2(l+j)+1}(q)+B^{(2p+1)}_{2(l+j)+1}(q)B^{(2n+1)}_{2l+1}(q)\right]-\sum_{l=0}^{l=j-1}B^{(2p)}_{2l+1}(q)B^{(2n)}_{2(j-1-l)+1}(q)\right\}$$

$$I^{s}_{2p+1,2n+1}(\eta,q)=\frac{1}{\pi}\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}d\theta\,\frac{se_{2p+1}(\theta,q)se_{2n+1}(\theta,q)}{\sqrt{Cosh(2\eta)-Cos(2\theta)}}=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\sum_{j=0}^{j=\infty}\frac{Q_{j-\frac{1}{2}}(Cosh(2\eta))}{(1+\partial_{j,0})}\Psi^{(2,j)}_{2p+1,2n+1}(q)\quad pour\quad p,n>0$$

## ***Quelques intégrales des fonctions de Mathieu radiales d'ordre entier***

*Dans ce qui suit on omet également les indices des paramètres q de l'équation de Mathieu, sachant qu'ils sont en général dépendant et de l'ordre de la fonction de Mathieu angulaire paire ou impaires et d'un autre paramètre entier issue de la séparation de la hauteur z dans l'équation de Laplace ou Helmholtz.*

*A partir des développements en fonction hyperboliques des fonctions de Mathieu radiales Je et Jo, il est théoriquement possible de calculer les intégrales rencontrées dans les problèmes aux limites de Dirichlet et Neumann. Toutefois les développements soufrent d'un gros handicap, leur convergence de plus en plus lente pour les plus grandes valeurs de l'argument. Typiquement un test sur des valeurs de η > 1, donne des résultats médiocres avec une vingtaine de termes du développement. Il faudrait théoriquement augmenter inconsidérément le nombre de termes du développement pour retrouver la convergence, ce qui en pratique est infaisable. C'est d'ailleurs en partie la raison pour laquelle on utilise le développement en produit croisé de fonction de Bessel qui lui a une convergence très rapide.*

*Ce défaut des séries de fonctions hyperboliques se transmet immédiatement à l'évaluation des intégrales. Si l'on revient aux proportions géométriques d'une section elliptique d'un cylindre, on peut donner une estimation grossière à partir de laquelle le rapport des grands et petit axe ne peuvent conduire à une bonne estimation de ces intégrales. En présentation des coordonnées elliptiques, on a vu que le facteur d'échelle se calculait à partir des petit et grand axes de l'ellipse sur la frontière du domaine :* $\varepsilon = \frac{b}{a} = Tanh(l_\eta)$ $\quad facteurd'\acute{e}chelle\ c = \sqrt{a^2 - b^2} = a\sqrt{1-\varepsilon^2}$ *. Le calcul des intégrales s'avère donc raisonnablement possible dans l'intervalle du rapport des axes elliptiques :* $0 < l_\eta < 1 \Rightarrow 0 < \varepsilon = \frac{b}{a} < Tanh(1) = 0{,}76159$

*Autrement dit, plus on se rapproche du cercle moins l'évaluation des intégrales par les séries hyperboliques est valable. Il s'agit principalement de donner l'évaluation des intégrales suivantes :*

$$I^{(0)}_{Je,2,n} = \int_0^{\eta_0} d\eta\ {Je_n}^2(\eta,|q|) \quad I^{(0)}_{Jo,2,n} = \int_0^{\eta_0} d\eta\ {Jo_n}^2(\eta,|q|)$$

$$I^{(1)}_{Je,2,n,Cosh} = \int_0^{\eta_0} d\eta\, Cosh(2\eta)\, {Je_n}^2(\eta,|q|) \quad I^{(1)}_{Jo,2,n,Cosh} = \int_0^{\eta_0} d\eta\, Cosh(2\eta)\, {Jo_n}^2(\eta,|q|)$$

.

*Ainsi qu'aux intégrales définies suivantes venant également du dénominateur :*

$$I^{(0)}_{Je,2,2n}=\int_0^{\eta_0} d\eta\ Je_{2n}{}^2(\eta,|q|) \quad I^{(0)}_{Je,2,2n+1}=\int_0^{\eta_0} d\eta\ Je_{2n+1}{}^2(\eta,|q|)$$

$$I^{(0)}_{Jo,2,2n+1}=\int_0^{\eta_0} d\eta\ Jo_{2n+1}{}^2(\eta,|q|) \quad I^{(0)}_{Jo,2,2n+2}=\int_0^{\eta_0} d\eta\ Jo_{2n+2}{}^2(\eta,|q|)$$

$$I^{(1)}_{Je,2,2n,Cosh}=\int_0^{\eta_0} d\eta\, Cosh(2\eta)\, Je_{2n}{}^2(\eta,|q|) \quad I^{(1)}_{Je,2,2n+1,Cosh}=\int_0^{\eta_0} d\eta\, Cosh(2\eta)\, Je_{2n+1}{}^2(\eta,|q|)$$

$$I^{(1)}_{Jo,2,2n+1,Cosh}=\int_0^{\eta_0} d\eta\, Cosh(2\eta)\, Jo_{2n+1}{}^2(\eta,|q|) \quad I^{(1)}_{Jo,2,2n+2,Cosh}=\int_0^{\eta_0} d\eta\, Cosh(2\eta)\, Jo_{2n+2}{}^2(\eta,|q|)$$

$$I^{(p)}_{Je,2,2n,Cosh}=\int_0^{\eta_0} d\eta\, Cosh(2p\eta)\, Je_{2n}{}^2(\eta,|q|) \quad I^{(p)}_{Je,2,2n+1,Cosh}=\int_0^{\eta_0} d\eta\, Cosh(2p\eta)\, Je_{2n+1}{}^2(\eta,|q|)$$

$$I^{(p)}_{Jo,2,2n+1,Cosh}=\int_0^{\eta_0} d\eta\, Cosh(2p\eta)\, Jo_{2n+1}{}^2(\eta,|q|) \quad I^{(p)}_{Jo,2,2n+2,Cosh}=\int_0^{\eta_0} d\eta\, Cosh(2p\eta)\, Jo_{2n+2}{}^2(\eta,|q|)$$

*Pour les numérateurs, en supposant pour simplifier une fonction aux limites constante, soit respectant une symétrie Y+,X+, comme f(η,ϑ)=1, il vient :*

$$f_{\mathrm{Y+,X+}}(\eta,\theta)=1 \Rightarrow I^{ce,Je}_{\mathrm{Y+,X+},l}=\int_0^{\eta_0} d\eta \int_0^{2\pi} d\theta\ \left(Cosh(2\eta)-Cos(2\theta)\right) Je_l\left(\eta,|q|_{l,m}\right) ce_l(\vartheta,|q|)$$

$$=\left[\int_0^{\eta_0} d\eta\, Cosh(2\eta)\ Je_n(\eta,|q|)\right]\left[\int_0^{2\pi} d\theta\ \ ce_n(\vartheta,|q|)\right]-\left[\int_0^{\eta_0} d\eta\ Je_n(\eta,|q|)\right]\left[\int_0^{2\pi} d\theta\, Cos(2\theta)\ ce_n(\vartheta,|q|)\right]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} I^{ce,Je}_{\mathrm{Y+,X+},2n+1}=0 \\ I^{ce,Je}_{\mathrm{Y+X+},2n}=2\pi A_0^{(2n)}\int_0^{\eta_0} d\eta\, Cosh(2\eta)\ Je_{2n}(\eta,|q|)-\pi A_2^{(2n)}\int_0^{\eta_0} d\eta\ Je_{2n}(\eta,|q|)=\pi\left(2A_0^{(2n)} I^{(1)}_{Je,1,2n,Cosh}-A_2^{(2n)} I^{(0)}_{Je,1,2n}\right) \end{cases}$$

$$Et \quad I^{se,Jo}_{\mathrm{Y+,X+},n}=\int_0^{\eta_0} d\eta \int_0^{2\pi} d\theta\ f(\eta,\theta)\left(Cosh(2\eta)-Cos(2\theta)\right) Jo_n(\eta,|q|)\, se_n(\vartheta,|q|)$$

$$=\int_0^{\eta_0} d\eta\, Cosh(2\eta)\ Jo_n(\eta,|q|)\int_0^{2\pi} d\theta\ \ se_n(\vartheta,|q|)-\int_0^{\eta_0} d\eta\ Jo_n(\eta,|q|)\int_0^{2\pi} d\theta\, Cos(2\theta)\ se_n(\vartheta,|q|)=0$$

$$\Rightarrow I^{ce,Je}_{\mathrm{Y+X+},2n}=\pi\left(\Theta^{(1,0)}_{2n} I^{(1)}_{Je,1,2n,Cosh}-\Theta^{(1,1)}_{2n} I^{(0)}_{Je,1,2n}\right)$$

*En supposant une fonctions limite respectant la symétrie {Y+,X-}, il vient :*

$$f_{\mathrm{Y+,X-}}(\eta,\theta)=\begin{cases} 1 & \theta\in[0,\pi] \\ -1 & \theta\in[\pi,2\pi] \end{cases} \Rightarrow I^{ce,Je}_{\mathrm{Y+,X-},2n}=0 \quad I^{ce,Je}_{\mathrm{Y+,X-},2n+1}=0 \quad I^{se,Jo}_{\mathrm{Y+,X-},2n+2}=0$$

$$I^{se,Jo}_{\mathrm{Y+,X-},2n+1}=2\int_0^{\eta_0} d\eta \int_0^{\pi} d\theta\ \left(Cosh(2\eta)-Cos(2\theta)\right) Jo_{2n+1}(\eta,|q|)\, se_{2n+1}(\vartheta,|q|)$$

$$=2\left\{\int_0^{\pi} d\theta\ se_{2n+1}(\vartheta,|q|)\int_0^{\eta_0} d\eta\, Cosh(2\eta) Jo_{2n+1}(\eta,|q|)-\int_0^{\pi} d\theta\, Cos(2\theta)\ se_{2n+1}(\vartheta,|q|)\int_0^{\eta_0} d\eta\ Jo_{2n+1}(\eta,|q|)\right\}$$

$$\Rightarrow I^{se,Jo}_{\mathrm{Y+,X-},2n+1}=2\pi\left(\Psi^{(1,0)}_{2n+1} I^{(1)}_{Jo,1,2n+1,Cosh}-\Psi^{(1,1)}_{2n+1} I^{(0)}_{Jo,1,2n+1}\right)$$

*En supposant une fonctions limite respectant la symétrie {Y-,X+}, il vient :*

$$f_{\mathrm{Y-,X+}}(\eta,\theta)=f_{\mathrm{Y-,X+}}(\theta)=\begin{cases}1 & \theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\cup\left[\frac{3\pi}{2},2\pi\right]\\ -1 & \theta\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]\end{cases}\Rightarrow I^{ce,Je}_{\mathrm{Y-,X+},2n}=0\quad I^{se,Jo}_{\mathrm{Y-,X+},2n+1}=0\quad I^{se,Jo}_{\mathrm{Y-,X+},2n+2}=0$$

$$I^{ce,Je}_{\mathrm{Y-,X+},2n+1}=\int_0^{\eta_0}d\eta\int_0^{2\pi}d\theta\ f_{\mathrm{Y-,X+}}(\theta)\left(Cosh(2\eta)-Cos(2\theta)\right)Je_{2n+1}(\eta,|q|)\,ce_{2n+1}(\vartheta,|q|)$$

$$\Rightarrow I^{ce,Je}_{\mathrm{Y-,X+},2n+1}=4\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\ ce_{2n+1}(\vartheta,|q|)\left[\int_0^{\eta_0}d\eta\,Cosh(2\eta)\ Je_{2n+1}(\eta,|q|)\right]-\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\ Cos(2\theta)\,ce_{2n+1}(\vartheta,|q|)\left[\int_0^{\eta_0}d\eta\ Je_{2n+1}(\eta,|q|)\right]\right\}$$

$$\Rightarrow I^{ce,Je}_{\mathrm{Y-,X+},2n+1}=4\pi\left\{\Theta^{(1,0)}_{2n+1}I^{(1)}_{Je,1,2n+1,Cosh}-\Theta^{(1,1)}_{2n+1}I^{(0)}_{Je,1,2n+1}\right\}$$

*En supposant une fonctions limite respectant la symétrie {Y-,X-}, il vient :*

$$f_{\mathrm{Y-,X-}}(\eta,\theta)=\begin{cases}1 & \theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\cup\left[\pi,\frac{3\pi}{2}\right]\\ -1 & \theta\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]\cup\left[\frac{3\pi}{2},2\pi\right]\end{cases}\Rightarrow I^{ce,Je}_{\mathrm{Y+,X-},2n}=0\quad I^{ce,Je}_{\mathrm{Y+,X-},2n+1}=0\quad I^{se,Jo}_{\mathrm{Y+,X-},2n+1}=0$$

$$I^{se,Jo}_{\mathrm{Y+,X-},2n+2}=\left\{\begin{array}{l}\int_0^{2\pi}d\theta\ f_{\mathrm{Y-,X-}}(\theta)\,se_{2n+2}(\vartheta,|q|)\left[\int_0^{\eta_0}d\eta\,Cosh(2\eta)\ Jo_{2n+2}(\eta,|q|)\right]-\\ -\int_0^{\pi}d\theta\ f_{\mathrm{Y-,X-}}(\theta)Cos(2\theta)se_{2n+2}(\vartheta,|q|)\left[\int_0^{\eta_0}d\eta\ Jo_{2n+2}(\eta,|q|)\right]\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow I^{ce,Je}_{\mathrm{Y-,X+},2n+1}=4\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\ se_{2n+2}(\vartheta,|q|)\left[\int_0^{\eta_0}d\eta\,Cosh(2\eta)\ Jo_{2n+2}(\eta,|q|)\right]-\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\ Cos(2\theta)\,se_{2n+2}(\vartheta,|q|)\left[\int_0^{\eta_0}d\eta\ Jo_{2n+2}(\eta,|q|)\right]\right\}$$

$$\Rightarrow I^{ce,Je}_{\mathrm{Y-,X+},2n+1}=4\pi\left\{\Psi^{(1,0)}_{2n+2}I^{(1)}_{Jo,1,2n+2,Cosh}-\Psi^{(1,1)}_{2n+2}I^{(0)}_{Jo,1,2n+2}\right\}$$

*On doit donc compléter par le calcul des intégrales des fonctions radiales :*

$$I^{(0)}_{Je,1,2n}=\int_0^{\eta_0}d\eta\ Je_{2n}(\eta,|q|)\quad I^{(0)}_{Je,1,2n+1}=\int_0^{\eta_0}d\eta\ Je_{2n+1}(\eta,|q|)$$

$$I^{(0)}_{Jo,1,2n+1}=\int_0^{\eta_0}d\eta\ Jo_{2n+1}(\eta,|q|)\quad I^{(0)}_{Jo,1,2n+2}=\int_0^{\eta_0}d\eta\ Jo_{2n+2}(\eta,|q|)$$

$$I^{(1)}_{Je,1,2n,Cosh}=\int_0^{\eta_0}d\eta\,Cosh(2\eta)\,Je_{2n}(\eta,|q|)\quad I^{(1)}_{Je,1,2n+1,Cosh}=\int_0^{\eta_0}d\eta\,Cosh(2\eta)\,Je_{2n+1}(\eta,|q|)$$

$$I^{(1)}_{Jo,1,2n+1,Cosh}=\int_0^{\eta_0}d\eta\,Cosh(2\eta)\,Jo_{2n+1}(\eta,|q|)\quad I^{(1)}_{Jo,1,2n+2,Cosh}=\int_0^{\eta_0}d\eta\,Cosh(2\eta)\,Jo_{2n+2}(\eta,|q|)$$

$$I^{(p)}_{Je,1,2n,Cosh}=\int_0^{\eta_0}d\eta\,Cosh(2p\eta)\,Je_{2n}(\eta,|q|)\quad I^{(p)}_{Je,1,2n+1,Cosh}=\int_0^{\eta_0}d\eta\,Cosh(2p\eta)\,Je_{2n+1}(\eta,|q|)$$

$$I^{(p)}_{Jo,1,2n+1,Cosh}=\int_0^{\eta_0}d\eta\,Cosh(2p\eta)\,Jo_{2n+1}(\eta,|q|)\quad I^{(p)}_{Jo,1,2n+2,Cosh}=\int_0^{\eta_0}d\eta\,Cosh(2p\eta)\,Jo_{2n+2}(\eta,|q|)$$

*Ces dernières intégrales peuvent se calculer à l'aide de leur décomposition en fonction hyperbolique :*

$$I^{(0)}_{Je,1,2n} = \int_0^{\eta_0} dz\ Je_{2n}(z,|q|) = \int_0^{\eta_0} dz \sum_{l=0}^{l=\infty} A^{(2n)}_{2l} Cosh(2l\,z) = \sum_{l=0}^{l=\infty} A^{(2n)}_{2l} \int_0^{\eta_0} d\eta\ Cosh(2l\,z)$$

$$I^{(0)}_{Je,1,2n} = A^{(2n)}_0 \eta_0 + \sum_{l=1}^{l=\infty} A^{(2n)}_{2l} \frac{1}{2l}\left[Sinh(2l\,z)\right]_0^{\eta_0} = A^{(2n)}_0 \eta_0 + \sum_{l=1}^{l=\infty} A^{(2n)}_{2l} \frac{Sinh(2l\,\eta_0)}{2l}$$

$$I^{(0)}_{Je,1,2n+1} = \int_0^{\eta_0} dz\ Je_{2n+1}(z,|q|) = \int_0^{\eta_0} dz \sum_{l=0}^{l=\infty} A^{(2n+1)}_{2l+1} Cosh((2l+1)z) = \sum_{l=1}^{l=\infty} A^{(2n+1)}_{2l+1} \frac{Sinh((2l+1)\eta_0)}{2l+1}$$

$$I^{(0)}_{Jo,1,2n+1} = \int_0^{\eta_0} dz\ Jo_{2n+1}(z,|q|) = \int_0^{\eta_0} dz \sum_{l=0}^{l=\infty} B^{(2n+1)}_{2l+1} Sinh((2l+1)z) = \sum_{l=0}^{l=\infty} B^{(2n+1)}_{2l+1} \frac{Cosh((2l+1)\eta_0)-1}{2l+1}$$

$$I^{(0)}_{Jo,1,2n+2} = \int_0^{\eta_0} dz\ Jo_{2n+2}(z,|q|) = \sum_{l=0}^{l=\infty} B^{(2n+2)}_{2l+2} \frac{Cosh((2l+2)\eta_0)-1}{2l+2}$$

$$I^{(1)}_{Je,1,2n,Cosh} = \int_0^{\eta_0} dz\ Cosh(2\,z) Je_{2n}(z,|q|) = \sum_{l=0}^{l=\infty} A^{(2n)}_{2l} \int_0^{\eta_0} d\eta\ Cosh(2l\,z) Cosh(2\,z) =$$

$$I^{(1)}_{Je,1,2n,Cosh} = \frac{A^{(2n)}_0}{2} Sinh(2\eta_0) + \frac{A^{(2n)}_2}{8}(4\eta_0 + Sinh(4\eta_0)) + \frac{1}{4}\sum_{l=2}^{l=\infty} A^{(2n)}_{2l}\left(\frac{Sinh(2(l+1)\eta_0)}{l+1} + \frac{Sinh(2(l-1)\eta_0)}{l-1}\right)$$

$$I^{(1)}_{Je,1,2n+1,Cosh} = \int_0^{\eta_0} dz\ Cosh(2\,z) Je_{2n+1}(z,|q|) = \sum_{l=0}^{l=\infty} A^{(2n+1)}_{2l+1} \int_0^{\eta_0} d\eta\ Cosh((2l+1)z) Cosh(2\,z) =$$

$$I^{(1)}_{Je,1,2n+1,Cosh} = \frac{1}{2}\sum_{l=0}^{l=\infty} A^{(2n+1)}_{2l+1}\left(\frac{Sinh((2l-1)\eta_0)}{2l-1} + \frac{Sinh((2l+3)\eta_0)}{2l+3}\right)$$

$$I^{(1)}_{Jo,1,2n+1,Cosh} = \int_0^{\eta_0} dz\ Cosh(2\,z) Jo_{2n+1}(z,|q|) = \sum_{l=0}^{l=\infty} B^{(2n+1)}_{2l+1} \int_0^{\eta_0} d\eta\ Sinh((2l+1)z) Cosh(2\,z) =$$

$$I^{(1)}_{Jo,1,2n+1,Cosh} = \frac{1}{2}\sum_{l=0}^{l=\infty} B^{(2n+1)}_{2l+1}\left(\frac{Cosh((2l-1)\eta_0)}{2l-1} + \frac{Cosh((2l+3)\eta_0)}{2l+3} - \frac{2(2l+1)}{(2l-1)(2l+3)}\right)$$

$$I^{(1)}_{Jo,1,2n+2,Cosh} = \int_0^{\eta_0} dz\ Cosh(2\,z) Jo_{2n+2}(z,|q|) = \sum_{l=0}^{l=\infty} B^{(2n+2)}_{2l+2} \int_0^{\eta_0} d\eta\ Sinh((2l+2)z) Cosh(2\,z) =$$

$$I^{(1)}_{Jo,1,2n+2,Cosh} = \frac{B^{(2n+2)}_2 Sinh^2(2\eta_0)}{4} + \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{l=\infty} B^{(2n+2)}_{2l+2}\left(\frac{Cosh((2l)\eta_0)}{2l} + \frac{Cosh((2l+4)\eta_0)}{2l+4} - \frac{l+1}{l(l+2)}\right)$$

*Tout comme les intégrales quadratiques se calculent à l'aide de leur décomposition en fonction hyperbolique :*

$$I^{(0)}_{Je,2,2n}=\int_0^{\eta_0}dz\,\left(Je_{2n}\left(z,|q|\right)\right)^2=\sum_{l=0}^{l=\infty}\sum_{p=0}^{p=\infty}A^{(2n)}_{2l}A^{(2n)}_{2p}\int_0^{\eta_0}dz\;Cosh(2l\,z)Cosh(2p\,z)$$

$$I^{(0)}_{Je,2,2n+1}=\int_0^{\eta_0}dz\,\left(Je_{2n+1}\left(z,|q|\right)\right)^2=\sum_{l=0}^{l=\infty}\sum_{p=0}^{p=\infty}A^{(2n+1)}_{2l+1}A^{(2n+1)}_{2p+1}\int_0^{\eta_0}dz\;Cosh((2l+1)z)Cosh((2p+1)z)$$

$$I^{(0)}_{Jo,2,2n+1}=\int_0^{\eta_0}dz\,\left(Jo_{2n+1}\left(z,|q|\right)\right)^2=\sum_{l=0}^{l=\infty}\sum_{p=0}^{p=\infty}B^{(2n+1)}_{2l+1}B^{(2n+1)}_{2p+1}\int_0^{\eta_0}dz\;Sinh((2l+1)z)Sinh((2p+1)z)$$

$$I^{(0)}_{Jo,2,2n+2}=\int_0^{\eta_0}dz\,\left(Jo_{2n+2}\left(z,|q|\right)\right)^2=\sum_{l=0}^{l=\infty}\sum_{p=0}^{p=\infty}B^{(2n+2)}_{2l+2}B^{(2n+2)}_{2p+2}\int_0^{\eta_0}dz\;Sinh((2l+2)z)Sinh((2p+2)z)$$

$$I^{(1)}_{Je,2,2n,Cosh}=\int_0^{\eta_0}dz\;Cosh(2\,z)\left(Je_{2n}\left(z,|q|\right)\right)^2=\sum_{l=0}^{l=\infty}\sum_{p=0}^{p=\infty}A^{(2n)}_{2l}A^{(2n)}_{2p}\int_0^{\eta_0}dz\;Cosh(2l\,z)Cosh(2p\,z)Cosh(2\,z)$$

$$I^{(1)}_{Je,2,2n+1,Cosh}=\int_0^{\eta_0}dz\;Cosh(2\,z)\left(Je_{2n+1}\left(z,|q|\right)\right)^2=\sum_{l=0}^{l=\infty}\sum_{p=0}^{p=\infty}A^{(2n+1)}_{2l+1}A^{(2n+1)}_{2p+1}\int_0^{\eta_0}dz\;Cosh((2l+1)z)Cosh((2p+1)z)Cosh(2\,z)$$

$$I^{(1)}_{Jo,2,2n+1,Cosh}=\int_0^{\eta_0}dz\;Cosh(2\,z)\left(Jo_{2n+1}\left(z,|q|\right)\right)^2=\sum_{l=0}^{l=\infty}\sum_{p=0}^{p=\infty}B^{(2n+1)}_{2l+1}B^{(2n+1)}_{2p+1}\int_0^{\eta_0}dz\;Sinh((2l+1)z)Sinh((2p+1)z)Cosh(2\,z)$$

$$I^{(1)}_{Jo,2,2n+2,Cosh}=\int_0^{\eta_0}dz\;Cosh(2\,z)\left(Jo_{2n+2}\left(z,|q|\right)\right)^2=\sum_{l=0}^{l=\infty}\sum_{p=0}^{p=\infty}B^{(2n+2)}_{2l+2}B^{(2n+2)}_{2p+2}\int_0^{\eta_0}dz\;Sinh((2l+2)z)Sinh((2p+2)z)Cosh(2\,z)$$

*Soit en notant comme suit:*

$$I^{(0)}_{Je,2,2n}=\sum_{l=0}^{l=\infty}\sum_{p=0}^{p=\infty}A^{(2n)}_{2l}A^{(2n)}_{2p}I^{(0)}_{Je}\left(2l,2p\right)$$

$$I^{(0)}_{Je,2,2n+1}=\sum_{l=0}^{l=\infty}\sum_{p=0}^{p=\infty}A^{(2n+1)}_{2l+1}A^{(2n+1)}_{2p+1}I^{(0)}_{Je}\left(2l+1,2p+1\right)$$

$$I^{(0)}_{Jo,2,2n+1}=\sum_{l=0}^{l=\infty}\sum_{p=0}^{p=\infty}B^{(2n+1)}_{2l+1}B^{(2n+1)}_{2p+1}I^{(0)}_{Jo}\left(2l+1,2p+1\right)$$

$$I^{(0)}_{Jo,2,2n+2}=\sum_{l=0}^{l=\infty}\sum_{p=0}^{p=\infty}B^{(2n+2)}_{2l+2}B^{(2n+2)}_{2p+2}I^{(0)}_{Jo}\left(2l+2,2p+2\right)$$

$$I^{(1)}_{Je,2,2n,Cosh}=\sum_{l=0}^{l=\infty}\sum_{p=0}^{p=\infty}A^{(2n)}_{2l}A^{(2n)}_{2p}I^{(1)}_{Je,Cosh}\left(2l,2p\right)$$

$$I^{(1)}_{Je,2,2n+1,Cosh}=\sum_{l=0}^{l=\infty}\sum_{p=0}^{p=\infty}A^{(2n+1)}_{2l+1}A^{(2n+1)}_{2p+1}I^{(1)}_{Je,Cosh}\left(2l+1,2p+1\right)$$

$$I^{(1)}_{Jo,2,2n+1,Cosh}=\sum_{l=0}^{l=\infty}\sum_{p=0}^{p=\infty}B^{(2n+1)}_{2l+1}B^{(2n+1)}_{2p+1}I^{(1)}_{Jo,Cosh}\left(2l+1,2p+1\right)$$

$$I^{(1)}_{Jo,2,2n+2,Cosh}=\sum_{l=0}^{l=\infty}\sum_{p=0}^{p=\infty}B^{(2n+2)}_{2l+2}B^{(2n+2)}_{2p+2}I^{(1)}_{Jo,Cosh}\left(2l+2,2p+2\right)$$

*Ce qui donne pour le premier jeu d'intégrales :*

$$I_{Je}^{(0)}(2l,2p)=\int_0^{\eta_0} dz\, Cosh(2l\,z)Cosh(2p\,z)=\begin{cases}\eta_0 \quad si \quad l=p=0 \quad et \quad \frac{1}{4}\left(\frac{Sinh(4l\eta_0)}{2l}+2\eta_0\right) \quad si \quad l=p\neq 0\\ \frac{1}{4}\left(\frac{Sinh(2(l+p)\eta_0)}{l+p}+\frac{Sinh(2(l-p)\eta_0)}{l-p}\right) \quad si \quad l\neq p\end{cases}$$

$$I_{Je}^{(0)}(2l+1,2p+1)=\int_0^{\eta_0} dz\, Cosh((2l+1)z)Cosh((2p+1)z)=\begin{cases}\frac{1}{4}\left(\frac{Sinh(2(2l+1)\eta_0)}{(2l+1)}+2\eta_0\right) \quad si \quad l=p\\ \frac{1}{4}\left(\frac{Sinh(2(l+p+1)\eta_0)}{l+p+1}+\frac{Sinh(2(l-p)\eta_0)}{l-p}\right) \quad si \quad l\neq p\end{cases}$$

$$I_{Jo}^{(0)}(2l+1,2p+1)=\int_0^{\eta_0} dz\, Sinh((2l+1)z)Sinh((2p+1)z)=\begin{cases}\frac{1}{4}\left(\frac{Sinh(2(2l+1)\eta_0)}{(2l+1)}-2\eta_0\right) \quad si \quad l=p\\ \frac{1}{4}\left(\frac{Sinh(2(l+p+1)\eta_0)}{l+p+1}-\frac{Sinh(2(l-p)\eta_0)}{l-p}\right) \quad si \quad l\neq p\end{cases}$$

$$I_{Jo}^{(0)}(2l+2,2p+2)=\int_0^{\eta_0} dz\, Sinh((2l+2)z)Sinh((2p+2)z)=\begin{cases}\frac{1}{4}\left(\frac{Sinh(4(l+1)\eta_0)}{2(l+1)}-2\eta_0\right) \quad si \quad l=p\\ \frac{1}{4}\left(\frac{Sinh(2(l+p+2)\eta_0)}{l+p+2}-\frac{Sinh(2(l-p)\eta_0)}{l-p}\right) \quad si \quad l\neq p\end{cases}$$

*Et pour le deuxième jeu d'intégrales :*

$$I_{Je,Cosh}^{(1)}(2l,2p)=\int_0^{\eta_0} dz\, Cosh(2l\,z)Cosh(2p\,z)Cosh(2\,z)=$$

$$=\begin{cases}\frac{\eta_0}{2}+\frac{Sinh(4\eta_0)}{8} \quad si \quad (l=1 \quad et \quad p=0) \quad ou \quad (l=0 \quad et \quad p=1)\\ \frac{1}{16}\left(4\eta_0+Sinh(4\eta_0)+\frac{Sinh(4p\eta_0)}{p}+\frac{Sinh(4(1+p)\eta_0)}{1+p}\right) \quad si \quad l=1+p \quad et \quad p\neq 0\\ \frac{1}{16}\left(4\eta_0+Sinh(4\eta_0)+\frac{Sinh(4p\eta_0)}{p}+\frac{Sinh(4(1-p)\eta_0)}{1-p}\right) \quad si \quad \begin{cases}(l=1-p \quad et \quad p\neq 0)\\ ou \quad (l=p-1 \quad et \quad p\neq 1)\end{cases}\\ \frac{1}{8}\left(\frac{Sinh(2(l+p+1)\eta_0)}{l+p+1}+\frac{Sinh(2(l+p-1)\eta_0)}{l+p-1}+\frac{Sinh(2(l-p+1)\eta_0)}{l-p+1}+\frac{Sinh(2(l-p-1)\eta_0)}{l-p-1}\right) \quad sinon\end{cases}$$

$$I_{Je,Cosh}^{(1)}(2l+1,2p+1)=\int_0^{\eta_0} dz\, Cosh((2l+1)z)Cosh((2p+1)z)Cosh(2\,z)=$$

$$=\begin{cases}\frac{\eta_0}{4}+\frac{Sinh(2\eta_0)}{4}+\frac{Sinh(4\eta_0)}{16} \quad si \quad l=p=0\\ \frac{1}{16}\left(4\eta_0+Sinh(4\eta_0)+2\left(\frac{Sinh(2(3+2p)\eta_0)}{3+2p}+\frac{Sinh(2(1+2p)\eta_0)}{1+2p}\right)\right) \quad si \quad l=1+p\\ \frac{1}{16}\left(4\eta_0+Sinh(4\eta_0)+2\left(\frac{Sinh(2(1-2p)\eta_0)}{1-2p}+\frac{Sinh(2(1+2p)\eta_0)}{1+2p}\right)\right) \quad si \quad l=p-1\\ \frac{1}{8}\left(\frac{Sinh(2(l+p+2)\eta_0)}{l+p+2}+\frac{Sinh(2(l+p)\eta_0)}{l+p}+\frac{Sinh(2(l-p+1)\eta_0)}{l-p+1}+\frac{Sinh(2(l-p-1)\eta_0)}{l-p-1}\right) \quad sinon\end{cases}$$

*Ainsi que :*

$$I^{(1)}_{Jo,Cosh}(2l+1,2p+1)=\int_0^{\eta_0} dz\ Sinh((2l+1)z)Sinh((2p+1)z)Cosh(2z)=$$

$$=\begin{cases} \frac{\eta_0}{4}-\frac{Sinh(2\eta_0)}{4}+\frac{Sinh(4\eta_0)}{16} & si \quad l=p=0 \\ \frac{1}{16}\left(-4\eta_0-Sinh(4\eta_0)+2\frac{Sinh(2(1+2p)\eta_0)}{1+2p}+2\frac{Sinh(2(3+2p)\eta_0)}{3+2p}\right) & si \quad l=1+p \\ \frac{1}{16}\left(-4\eta_0-Sinh(4\eta_0)+2\frac{Sinh(2(1-2p)\eta_0)}{1-2p}+2\frac{Sinh(2(1+2p)\eta_0)}{1+2p}\right) & si \quad l=p-1 \\ \frac{1}{8}\left(\frac{Sinh(2(l+p+2)\eta_0)}{l+p+2}+\frac{Sinh(2(l+p)\eta_0)}{l+p}-\frac{Sinh(2(l-p+1)\eta_0)}{l-p+1}-\frac{Sinh(2(l-p-1)\eta_0)}{l-p-1}\right) & sinon \end{cases}$$

$$I^{(1)}_{Jo,Cosh}(2l+2,2p+2)=\int_0^{\eta_0} dz\ Sinh((2l+2)z)Sinh((2p+2)z)Cosh(2z)=$$

$$=\begin{cases} -\frac{\eta_0}{4}+\frac{Sinh(8\eta_0)}{32} & si \quad (l=1 \quad et \quad p=0) \quad ou \quad (l=0 \quad et \quad p=1) \\ \frac{1}{16}\left(-4\eta_0-Sinh(4\eta_0)+\frac{Sinh(4(1+p)\eta_0)}{1+p}+\frac{Sinh(4(2+p)\eta_0)}{2+p}\right) & si \quad l=1+p \quad et \quad p\neq 0 \\ \frac{1}{16}\left(-4\eta_0-Sinh(4\eta_0)+\frac{Sinh(4p\eta_0)}{p}+\frac{Sinh(4(1+p)\eta_0)}{1+p}\right) & si \quad l=p-1 \quad et \quad p\neq 1 \\ \frac{1}{8}\left(\frac{Sinh(2(l+p+3)\eta_0)}{l+p+3}+\frac{Sinh(2(l+p+1)\eta_0)}{l+p+1}-\frac{Sinh(2(l-p+1)\eta_0)}{l-p+1}-\frac{Sinh(2(l-p-1)\eta_0)}{l-p-1}\right) & sinon \end{cases}$$

.

*Ce qui donne le résultat pour les 4 premières intégrales :*

$$I^{(0)}_{Je,2,2n} = \int_0^{\eta_0} dz \left(Je_{2n}(z,|q|_{n,m})\right)^2 =$$

$$= \left(A_0^{(2n)}\right)^2 \eta_0 + \frac{1}{4}\sum_{l=1}^{l=\infty}\left(A_{2l}^{(2n)}\right)^2\left(\frac{Sinh(4l\eta_0)}{2l} + 2\eta_0\right) + \frac{1}{4}\sum_{l=0}^{l=\infty}\sum_{p=0,p\neq l}^{p=\infty}\left(\frac{Sinh(2(l+p)\eta_0)}{l+p} + \frac{Sinh(2(l-p)\eta_0)}{l-p}\right)$$

$$I^{(0)}_{Je,2,2n+1} = \int_0^{\eta_0} dz \left(Je_{2n+1}(z,|q|_{n,m})\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{l=0}^{l=\infty}\left(A_{2l+1}^{(2n+1)}\right)^2\left(\frac{Sinh(2(2l+1)\eta_0)}{(2l+1)} + 2\eta_0\right) + \frac{1}{4}\sum_{l=0}^{l=\infty}\sum_{p=0,p\neq l}^{p=\infty} A_{2l+1}^{(2n+1)} A_{2p+1}^{(2n+1)}\left(\frac{Sinh(2(l+p+1)\eta_0)}{l+p+1} + \frac{Sinh(2(l-p)\eta_0)}{l-p}\right)$$

$$I^{(0)}_{Jo,2,2n+1} = \int_0^{\eta_0} dz \left(Jo_{2n+1}(z,|q|_{n,m})\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{l=0}^{l=\infty}\left(A_{2l+1}^{(2n+1)}\right)^2\left(\frac{Sinh(2(2l+1)\eta_0)}{(2l+1)} - 2\eta_0\right) + \frac{1}{4}\sum_{l=0}^{l=\infty}\sum_{p=0,p\neq l}^{p=\infty} B_{2l+1}^{(2n+1)} B_{2p+1}^{(2n+1)}\left(\frac{Sinh(2(l+p+1)\eta_0)}{l+p+1} - \frac{Sinh(2(l-p)\eta_0)}{l-p}\right)$$

$$I^{(0)}_{Jo,2,2n+2} = \int_0^{\eta_0} dz \left(Jo_{2n+2}(z,|q|_{n,m})\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{l=0}^{l=\infty}\left(A_{2l+2}^{(2n+2)}\right)^2\left(\frac{Sinh(4(l+1)\eta_0)}{2(l+1)} - 2\eta_0\right) + \frac{1}{4}\sum_{l=0}^{l=\infty}\sum_{p=0,p\neq l}^{p=\infty} B_{2l+2}^{(2n+2)} B_{2p+2}^{(2n+2)}\left(\frac{Sinh(2(l+p+2)\eta_0)}{l+p+2} - \frac{Sinh(2(l-p)\eta_0)}{l-p}\right)$$

*Et pour les 4 dernières intégrales :*

$$I^{(1)}_{Je,2,2n,Cosh} = \int_0^{\eta_0} dz\, Cosh(2z)\left(Je_{2n}\left(z,|q|_{n,m}\right)\right)^2 = \sum_{l=0}^{l=\infty}\sum_{p=0}^{p=\infty} A_{2l}^{(2n)} A_{2p}^{(2n)} I^{(1)}_{Je,2,Cosh}(2l,2p)$$

$$I^{(1)}_{Je,2,2n+1,Cosh} = \int_0^{\eta_0} dz\, Cosh(2z)\left(Je_{2n+1}\left(z,|q|_{n,m}\right)\right)^2 = \sum_{l=0}^{l=\infty}\sum_{p=0}^{p=\infty} A_{2l+1}^{(2n+1)} A_{2p+1}^{(2n+1)} I^{(1)}_{Je,2,Cosh}(2l+1,2p+1)$$

$$I^{(1)}_{Jo,2,2n+1,Cosh} = \int_0^{\eta_0} dz\, Cosh(2z)\left(Jo_{2n+1}\left(z,|q|_{n,m}\right)\right)^2 = \sum_{l=0}^{l=\infty}\sum_{p=0}^{p=\infty} B_{2l+1}^{(2n+1)} B_{2p+1}^{(2n+1)} I^{(1)}_{Jo,2,Cosh}(2l+1,2p+1)$$

$$I^{(1)}_{Jo,2,2n+2,Cosh} = \int_0^{\eta_0} dz\, Cosh(2z)\left(Jo_{2n+2}\left(z,|q|_{n,m}\right)\right)^2 = \sum_{l=0}^{l=\infty}\sum_{p=0}^{p=\infty} B_{2l+2}^{(2n+2)} B_{2p+2}^{(2n+2)} I^{(1)}_{Jo,2,Cosh}(2l+2,2p+2)$$

*Par extension, on peut calculer les intégrales suivantes :*

$$I^{(m)}_{Je,2,2n,Cosh}=\int_0^{\eta_0}dz\ Cosh(2m\,z)\left(Je_{2n}\left(z,|q|_{n,m}\right)\right)^2=\sum_{l=0}^{l=\infty}\sum_{p=0}^{p=\infty}A^{(2n)}_{2l}A^{(2n)}_{2p}\int_0^{\eta_0}dz\ Cosh(2l\,z)Cosh(2p\,z)Cosh(2m\,z)$$

$$I^{(m)}_{Je,2,2n+1,Cosh}=\int_0^{\eta_0}dz\ Cosh(2m\,z)\left(Je_{2n+1}\left(z,|q|_{n,m}\right)\right)^2=\sum_{l=0}^{l=\infty}\sum_{p=0}^{p=\infty}A^{(2n+1)}_{2l+1}A^{(2n+1)}_{2p+1}\int_0^{\eta_0}dz\ Cosh((2l+1)z)Cosh((2p+1)z)Cosh(2m\,z)$$

$$I^{(m)}_{Jo,2,2n+1,Cosh}=\int_0^{\eta_0}dz\ Cosh(2m\,z)\left(Jo_{2n+1}\left(z,|q|_{n,m}\right)\right)^2=\sum_{l=0}^{l=\infty}\sum_{p=0}^{p=\infty}B^{(2n+1)}_{2l+1}B^{(2n+1)}_{2p+1}\int_0^{\eta_0}dz\ Sinh((2l+1)z)Sinh((2p+1)z)Cosh(2m\,z)$$

$$I^{(m)}_{Jo,2,2n+2,Cosh}=\int_0^{\eta_0}dz\ Cosh(2m\,z)\left(Jo_{2n+2}\left(z,|q|_{n,m}\right)\right)^2=\sum_{l=0}^{l=\infty}\sum_{p=0}^{p=\infty}B^{(2n+2)}_{2l+2}B^{(2n+2)}_{2p+2}\int_0^{\eta_0}dz\ Sinh((2l+2)z)Sinh((2p+2)z)Cosh(2m\,z)$$

*Soit en notant comme suit :*

$$I^{(m)}_{Je,2,2n,Cosh}=\sum_{l=0}^{l=\infty}\sum_{p=0}^{p=\infty}A^{(2n)}_{2l}A^{(2n)}_{2p}I^{(m)}_{Je,Cosh}(2l,2p)\quad I^{(m)}_{Je,2,2n+1,Cosh}=\sum_{l=0}^{l=\infty}\sum_{p=0}^{p=\infty}A^{(2n+1)}_{2l+1}A^{(2n+1)}_{2p+1}I^{(m)}_{Je,Cosh}(2l+1,2p+1)$$

$$I^{(m)}_{Jo,2,2n+1,Cosh}=\sum_{l=0}^{l=\infty}\sum_{p=0}^{p=\infty}B^{(2n+1)}_{2l+1}B^{(2n+1)}_{2p+1}I^{(m)}_{Jo,Cosh}(2l+1,2p+1)\quad I^{(m)}_{Jo,2,2n+2,Cosh}=\sum_{l=0}^{l=\infty}\sum_{p=0}^{p=\infty}B^{(2n+2)}_{2l+2}B^{(2n+2)}_{2p+2}I^{(m)}_{Jo,Cosh}(2l+2,2p+2)$$

*Il vient pour les intégrales des fonctions radiales paires :*

$$I^{(m)}_{Je,Cosh}(2l,2p)=\int_0^{\eta_0}dz\ Cosh(2l\,z)Cosh(2p\,z)Cosh(2m\,z)=$$

$$=\begin{cases}\frac{\eta_0}{2}+\frac{Sinh(4m\eta_0)}{8m} & si\quad (l=m\quad et\quad p=0)\quad ou\quad (l=0\quad et\quad p=m)\\ \frac{1}{16}\left(4\eta_0+\frac{Sinh(4m\eta_0)}{m}+\frac{Sinh(4p\eta_0)}{p}+\frac{Sinh(4(m+p)\eta_0)}{1+p}\right) & si\quad l=m+p\quad et\quad p\neq 0\\ \frac{1}{16}\left(4\eta_0+\frac{Sinh(4m\eta_0)}{m}+\frac{Sinh(4p\eta_0)}{p}+\frac{Sinh(4(m-p)\eta_0)}{m-p}\right) & si\quad \begin{cases}(l=m-p\quad et\quad p\neq 0)\\ ou\quad (l=p-m\quad et\quad p\neq m)\end{cases}\\ \frac{1}{8}\left(\frac{Sinh(2(l+p+m)\eta_0)}{l+p+m}+\frac{Sinh(2(l+p-m)\eta_0)}{l+p-m}+\frac{Sinh(2(l-p+m)\eta_0)}{l-p+m}+\frac{Sinh(2(l-p-m)\eta_0)}{l-p-m}\right) & sinon\end{cases}$$

$$I^{(m)}_{Je,Cosh}(2l+1,2p+1)=\int_0^{\eta_0}dz\ Cosh((2l+1)z)Cosh((2p+1)z)Cosh(2m\,z)=$$

$$=\begin{cases}\frac{Sinh(2(m-1)\eta_0)}{8(m-1)}+\frac{Sinh(2m\eta_0)}{4m}+\frac{Sinh(2(1+m)\eta_0)}{8(1+m)} & si\quad l=p=0\\ \frac{1}{16}\left(4\eta_0+\frac{Sinh(4m\eta_0)}{m}+2\left(\frac{Sinh(2(2m+1+2p)\eta_0)}{2m+1+2p}+\frac{Sinh(2(1+2p)\eta_0)}{1+2p}\right)\right) & si\quad l=m+p\\ \frac{1}{16}\left(4\eta_0+\frac{Sinh(4m\eta_0)}{m}+2\left(\frac{Sinh(2(2m-1-2p)\eta_0)}{2m-1-2p}+\frac{Sinh(2(1+2p)\eta_0)}{1+2p}\right)\right) & si\quad \begin{cases}l=p-m\\ l=m-p-1\end{cases}\\ \frac{1}{8}\left(\frac{Sinh(2(l+p+m+1)\eta_0)}{l+p+m+1}+\frac{Sinh(2(l+p+1-m)\eta_0)}{l+p+1-m}+\frac{Sinh(2(l-p+m)\eta_0)}{l-p+m}+\frac{Sinh(2(l-p-m)\eta_0)}{l-p-m}\right) & sinon\end{cases}$$

*et pour les intégrales des fonctions radiales impaires :*

$$I^{(m)}_{Jo,Cosh}(2l+1,2p+1)=\int_0^{\eta_0}dz\; Sinh((2l+1)z)Sinh((2p+1)z)Cosh(2mz)=$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{16}\left(4\eta_0+\frac{Sinh(4m\eta_0)}{m}-2Sinh(2\eta_0)-2\frac{Sinh(2(2m-1)\eta_0)}{2m-1}\right) & si\quad \begin{cases}l=m-1\,,\,p=0\\ l=0\,,\,p=m-1\end{cases}\\ \frac{1}{16}\left(-4\eta_0-\frac{Sinh(4m\eta_0)}{m}+2Sinh(2\eta_0)+2\frac{Sinh(2(2m+1)\eta_0)}{2m+1}\right) & si\quad \begin{cases}l=m\,,\,p=0\\ l=0\,,\,p=m\end{cases}\\ \frac{1}{16}\left(-4\eta_0-\frac{Sinh(4m\eta_0)}{m}+2\frac{Sinh(2(1+2p)\eta_0)}{1+2p}+2\frac{Sinh(2(2m+1+2p)\eta_0)}{2m+1+2p}\right) & si\quad l=m+p\\ \frac{1}{16}\left(-4\eta_0-\frac{Sinh(4m\eta_0)}{m}+2\frac{Sinh(2(1+2p)\eta_0)}{1+2p}+2\frac{Sinh(2(2m-1-2p)\eta_0)}{2m-1-2p}\right) & si\quad l=p-m\\ \frac{1}{16}\left(4\eta_0+\frac{Sinh(4m\eta_0)}{m}-2\frac{Sinh(2(1+2p)\eta_0)}{1+2p}-2\frac{Sinh(2(2m-1-2p)\eta_0)}{2m-1-2p}\right) & si\quad l=m-p-1\\ \frac{1}{8}\left(\frac{Sinh(2(l+p+m+1)\eta_0)}{l+p+m+1}+\frac{Sinh(2(l+p+1-m)\eta_0)}{l+p+1-m}-\frac{Sinh(2(l-p+m)\eta_0)}{l-p+m}-\frac{Sinh(2(l-p-m)\eta_0)}{l-p-m}\right) & sinon\end{cases}$$

$$I^{(m)}_{Jo,Cosh}(2l+2,2p+2)=\int_0^{\eta_0}dz\; Sinh((2l+2)z)Sinh((2p+2)z)Cosh(2mz)=$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{16}\left(-4\eta_0+Sinh(4\eta_0)-\frac{Sinh(4m\eta_0)}{m}+\frac{Sinh(4(m+1)\eta_0)}{m+1}\right) & si\quad \begin{cases}l=m\quad et\quad p=0\\ l=0\quad et\quad p=m\end{cases}\\ \frac{1}{16}\left(4\eta_0-Sinh(4\eta_0)+\frac{Sinh(4m\eta_0)}{m}-\frac{Sinh(4(m-1)\eta_0)}{m-1}\right) & si\quad \begin{cases}l=m-2\quad et\quad p=0\\ l=0\quad et\quad p=m-2\end{cases}\\ \frac{1}{16}\left(-4\eta_0-\frac{Sinh(4m\eta_0)}{m}+\frac{Sinh(4(1+p)\eta_0)}{1+p}+\frac{Sinh(4(m+1+p)\eta_0)}{m+1+p}\right) & si\quad l=m+p\quad et\quad p\neq 0\\ \frac{1}{16}\left(-4\eta_0-\frac{Sinh(4m\eta_0)}{m}+\frac{Sinh(4(1+p)\eta_0)}{1+p}+\frac{Sinh(4(m-1-p)\eta_0)}{m-1-p}\right) & si\quad l=p-m\quad et\quad p\neq 1\\ \frac{1}{16}\left(-Sinh(4\eta_0)-\frac{Sinh(4(1+m)\eta_0)}{1+m}+\frac{Sinh(4(m-p)\eta_0)}{m-p}+\frac{Sinh(4p\eta_0)}{p}\right) & si\quad l=p-m-2\quad et\quad p\neq 1\\ \frac{1}{8}\left(\frac{Sinh(2(l+p+m+2)\eta_0)}{l+p+m+2}+\frac{Sinh(2(l+p+2-m)\eta_0)}{l+p+2-m}-\frac{Sinh(2(l-p+m)\eta_0)}{l-p+m}-\frac{Sinh(2(l-p-m)\eta_0)}{l-p-m}\right) & sinon\end{cases}$$

**_Expression de la seconde solution des fonctions de Mathieu angulaire d'ordre entier_**

*Dans un problème sur une section elliptique complète les secondes solutions paires et impaires de l'équation de Mathieu* $y''(x)+(\lambda-2qCos(2x))y(x)=0$ *sont apériodiques, d'ordre entier et l'on peut montrer qu'elles se construisent sous la forme spécifique suivante :*

$$fe_n(x,q)=C_n(q)\{x\,ce_n(x,q)+f_n(x,q)\}$$
$$ge_n(x,q)=S_n(q)\{x\,se_n(x,q)+g_n(x,q)\}$$

*Remarque : pour toute équation différentielle du second degré de la forme :* $y''(x)+Q(x)y(x)=0$*, il est facile de montrer que connaissant une première solution* $y_1(x)$*, alors la seconde solution peut notamment se construire comme suit :*

$$y_2(x)=y_1(x)\int^x\frac{dt}{(y_1(t))^2}$$

*En effet en cherchant la seconde solution sous la forme suivante, il vient :*

$$y_2(x)=y_1(x)v(x)\Rightarrow y_1(x)v''(x)+2y_1'(x)v'(x)=0$$
$$\Rightarrow\frac{v''(x)}{v'(x)}=-2\frac{y_1'(x)}{y_1(x)}\Rightarrow v(x)=\int^x\frac{dt}{(y_1(t))^2}$$
$$\Rightarrow y_2(x)=y_1(x)\int^x\frac{dt}{(y_1(t))^2}$$

*De plus le paramètre λ est une fonction de l'ordre n et du paramètre selon que la solution soit choisie paire ou impaire. Dans ces deux cas la valeur de λ aussi appelée caractéristique est différente. On peut écrire :*

$$\lambda=a(n,q)\quad si\ solution\ paire\quad et\quad n\in N$$
$$\lambda=b(n,q)\quad si\ solution\ impaire\quad et\quad n\in N$$

*On rappelle les propriétés de périodicité des fonctions angulaires des premières solutions:*

$$\begin{cases}ce_{2n}(x,q)\quad paire\ périodique\ \pi\Rightarrow ce_{2n}(-x,q)=ce_{2n}(x,q)\quad ce_{2n}(x+\pi,q)=ce_{2n}(x,q)\\ ce_{2n+1}(x,q)\quad paire\ anti-périodique\ \pi\Rightarrow ce_{2n+1}(-x,q)=ce_{2n+1}(x,q)\quad ce_{2n+1}(x+\pi,q)=-ce_{2n+1}(x,q)\end{cases}$$
$$\begin{cases}se_{2n+1}(x,q)\quad impaire\ anti-périodique\ \pi\Rightarrow se_{2n+1}(-x,q)=-se_{2n+1}(x,q)\quad se_{2n+1}(x+\pi,q)=-se_{2n+1}(x,q)\\ se_{2n+2}(x,q)\quad impaire\ périodique\ \pi\Rightarrow se_{2n+2}(-x,q)=-se_{2n+2}(x,q)\quad se_{2n+2}(x+\pi,q)=se_{2n+2}(x,q)\end{cases}$$

*Les fonctions fn et gn sont périodiques de période 2 π et possèdent les propriétés suivantes :*

$$f_n(x,q) \rightarrow \begin{cases} f_{2n}(x,q) \quad impaire\ périodique\ \pi \Rightarrow f_{2n}(-x,q) = -f_{2n}(x,q) \quad f_{2n}(x+\pi,q) = f_{2n}(x,q) \\ f_{2n+1}(x,q) \quad impaire\ anti-périodique\ \pi \Rightarrow f_{2n+1}(-x,q) = -f_{2n+1}(x,q) \quad f_{2n+1}(x+\pi,q) = -f_{2n+1}(x,q) \end{cases}$$

$$g_n(x,q) \rightarrow \begin{cases} g_{2n+1}(x,q) \quad paire\ \ anti-périodique\ \pi \Rightarrow g_{2n+1}(-x,q) = g_{2n+1}(x,q) \quad g_{2n+1}(x+\pi,q) = -g_{2n+1}(x,q) \\ g_{2n+2}(x,q) \quad paire\ périodique\ \pi \Rightarrow g_{2n+2}(-x,q) = g_{2n+2}(x,q) \quad g_{2n+2}(x+\pi,q) = g_{2n+2}(x,q) \end{cases}$$

*De plus les coefficients de normalisation Cn et Sn sont fixés tels que :*

$$(C_n(q))^2 = \frac{\pi}{\int_0^{2\pi} (f_n(x,q))^2\, dx} \qquad (S_n(q))^2 = \frac{\pi}{\int_0^{2\pi} (g_n(x,q))^2\, dx}$$

*Le signe des coefficients de normalisation est fixé de telle façon que par le passage à la limite q->0, on obtienne les fonctions sinusoïdales en seconde solution soit :*

$$\underset{q\to 0}{Lim}\ C_n(q) = 0 \quad \underset{q\to 0}{Lim}\ S_n(q) = 0 \Rightarrow \underset{q\to 0}{Lim}\ C_n(q) ce_n(x,q) = 0 \quad \underset{q\to 0}{Lim}\ S_n(q) se_n(x,q) = 0$$

$$\underset{q\to 0}{Lim}\ fe_n(x,q) = \underset{q\to 0}{Lim}\ C_n(q)\{x\, ce_n(x,q) + f_n(\eta,q)\} = \underset{q\to 0}{Lim}\ C_n(q) f_n(x,q) = Sin(nx)$$

$$\underset{q\to 0}{Lim}\ ge_n(x,q) = \underset{q\to 0}{Lim}\ S_n(q)\{x\, se_n(x,q) + g_n(\eta,q)\} = \underset{q\to 0}{Lim}\ S_n(q) g_n(x,q) = Cos(nx)$$

*Les propriétés de périodicité permettent donc de définir les secondes solutions à partir de l'intervalle [0,π] sur l'intervalle [-2π,2π], comme suit :*

$$\begin{cases} fe_{2n}(x,q)=C_{2n}(q)\{x\,ce_{2n}(x,q)+f_{2n}(x,q)\}\Rightarrow C_{2n}(q)=\dfrac{fe_{2n}(\pi,q)}{\pi ce_{2n}(0,q)} \\ fe_{2n}(-x,q)=-fe_{2n}(x,q) \quad et \quad fe_{2n}(x+\pi,q)=fe_{2n}(x,q)+\dfrac{fe_{2n}(\pi,q)}{ce_{2n}(0,q)}ce_{2n}(x,q) \\ fe_{2n}'(-x,q)=fe_{2n}(x,q) \quad et \quad fe_{2n}'(x+\pi,q)=fe_{2n}'(x,q)+\dfrac{fe_{2n}(\pi,q)}{ce_{2n}(0,q)}ce_{2n}'(x,q) \\ fe_{2n+1}(x,q)=C_{2n+1}(q)\{x\,ce_{2n+1}(x,q)+f_{2n+1}(x,q)\}\Rightarrow C_{2n+1}(q)=\dfrac{fe_{2n+1}(\pi,q)}{\pi ce_{2n+1}(0,q)} \\ fe_{2n+1}(-x,q)=-fe_{2n+1}(x,q) \quad et \quad fe_{2n+1}(x+\pi,q)=-fe_{2n+1}(x,q)-\dfrac{fe_{2n+1}(\pi,q)}{ce_{2n+1}(0,q)}ce_{2n+1}(x,q) \\ fe_{2n+1}'(-x,q)=fe_{2n+1}(x,q) \quad et \quad fe_{2n+1}'(x+\pi,q)=-fe_{2n+1}'(x,q)-\dfrac{fe_{2n+1}(\pi,q)}{ce_{2n+1}(0,q)}ce_{2n+1}'(x,q) \end{cases}$$

$$\begin{cases} ge_{2n+1}(x,q)=S_{2n+1}(q)\{x\,se_{2n+1}(x,q)+g_{2n+1}(x,q)\}\Rightarrow ge_{2n+1}'(x,q)=S_{2n+1}(q)\{x\,se_{2n+1}'(x,q)+g_{2n+1}'(x,q)+se_{2n+1}(x,q)\} \\ ge_{2n+1}'(\pi,q)=-S_{2n+1}(q)\pi\,se_{2n+1}'(\pi,q)\Rightarrow S_{2n+1}(q)=-\dfrac{ge_{2n+1}'(\pi,q)}{\pi se_{2n+1}'(\pi,q)}=+\dfrac{ge_{2n+1}'(\pi,q)}{\pi se_{2n+1}'(0,q)} \\ ge_{2n+1}(-x,q)=ge_{2n+1}(x,q) \quad et \quad ge_{2n+1}(x+\pi,q)=-ge_{2n+1}(x,q)-\dfrac{ge_{2n+1}'(\pi,q)}{se_{2n+1}'(0,q)}se_{2n+1}(x,q) \\ ge_{2n+1}'(-x,q)=-ge_{2n+1}'(x,q) \quad et \quad ge_{2n+1}'(x+\pi,q)=-ge_{2n+1}'(x,q)-\dfrac{ge_{2n+1}'(\pi,q)}{se_{2n+1}'(0,q)}se_{2n+1}'(x,q) \\ ge_{2n+2}(x,q)=S_{2n+2}(q)\{x\,se_{2n+2}(x,q)+g_{2n+2}(x,q)\}\Rightarrow ge_{2n+2}'(x,q)=S_{2n+2}(q)\{x\,se_{2n+2}'(x,q)+g_{2n+2}'(x,q)+se_{2n+2}(x,q)\} \\ ge_{2n+2}'(\pi,q)=-S_{2n+2}(q)\pi\,se_{2n+2}'(\pi,q)\Rightarrow S_{2n+2}(q)=-\dfrac{ge_{2n+2}'(\pi,q)}{\pi se_{2n+2}'(\pi,q)}=-\dfrac{ge_{2n+2}'(\pi,q)}{\pi se_{2n+2}'(0,q)} \\ ge_{2n+2}(-x,q)=ge_{2n+2}(x,q) \quad et \quad ge_{2n+2}(x+\pi,q)=ge_{2n+2}(x,q)-\dfrac{ge_{2n+2}'(\pi,q)}{se_{2n+2}'(0,q)}se_{2n+2}(x,q) \\ ge_{2n+2}'(-x,q)=-ge_{2n+2}'(x,q) \quad et \quad ge_{2n+2}'(x+\pi,q)=ge_{2n+2}'(x,q)-\dfrac{ge_{2n+2}'(\pi,q)}{se_{2n+2}'(0,q)}se_{2n+2}'(x,q) \end{cases}$$

.

*Il reste à définir sur tout intervalle positif au delà de 2π, en se ramenant à l'intervalle [0, 2π] :*

$$\begin{cases} fe_{2n}(x+2n\pi,q)=fe_{2n}(x,q)+2n\dfrac{fe_{2n}(\pi,q)}{ce_{2n}(0,q)}ce_{2n}(x,q) \\ fe_{2n}'(x+2n\pi,q)=fe_{2n}'(x,q)+2n\dfrac{fe_{2n}(\pi,q)}{ce_{2n}(0,q)}ce_{2n}'(x,q) \\ fe_{2n+1}(x+2n\pi,q)=fe_{2n+1}(x,q)+2n\dfrac{fe_{2n+1}(\pi,q)}{ce_{2n+1}(0,q)}ce_{2n+1}(x,q) \\ fe_{2n+1}'(x+2n\pi,q)=fe_{2n+1}'(x,q)+2n\dfrac{fe_{2n+1}(\pi,q)}{ce_{2n+1}(0,q)}ce_{2n+1}'(x,q) \end{cases}$$

$$\begin{cases} ge_{2n+1}(x+2n\pi,q)=ge_{2n+1}(x,q)+2n\dfrac{ge_{2n+1}'(\pi,q)}{se_{2n+1}'(0,q)}ge_{2n+1}(x,q) \\ ge_{2n+1}'(x+2n\pi,q)=ge_{2n+1}'(x,q)+2n\dfrac{ge_{2n+1}'(\pi,q)}{se_{2n+1}'(0,q)}ge_{2n+1}'(x,q) \\ ge_{2n+2}(x+2n\pi,q)=ge_{2n+2}(x,q)-2n\dfrac{ge_{2n+2}'(\pi,q)}{se_{2n+2}'(0,q)}ge_{2n+2}(x,q) \\ ge_{2n+2}'(x+2n\pi,q)=ge_{2n+2}'(x,q)-2n\dfrac{ge_{2n+2}'(\pi,q)}{se_{2n+2}'(0,q)}ge_{2n+2}'(x,q) \end{cases}$$

*Les Wronskiens des solutions de l'équation de Mathieu sont les suivants :*

$$Wronskien\ \{ce_n(x,q), fe_n(x,q)\} = Cste \quad et \quad Wronskien\ \{se_n(x,q), ge_n(x,q)\} = Cste \quad voir\ équation\ différentielle\ de\ Mathieu$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} Wronskien\ \{ce_n(x,q), fe_n(x,q)\} = ce_n(0,q)fe_n'(0,q) \\ Wronskien\ \{se_n(x,q), ge_n(x,q)\} = -se_n'(0,q)ge_n(0,q) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} Wronskien\ \{ce_n(x,0), fe_n(x,0)\} = Wronskien\ \{Cos(nx), Sin(nx)\} = 1 \\ Wronskien\ \{se_n(x,0), ge_n(x,0)\} = Wronskien\ \{Sin(nx), Cos(nx)\} = -1 \end{matrix}\right\}$$

*Ce qui donne les Wronskiens suivants avec les fonctions fn et gn :*

$$fe_n(x,q) = C_n(q)\{x\,ce_n(x,q) + f_n(x,q)\} \qquad ge_n(x,q) = S_n(q)\{x\,se_n(x,q) + g_n(x,q)\}$$

$$Wronskien\ \{ce_n(x,q), fe_n(x,q)\} = ce_n(0,q)fe_n'(0,q) = C_n(q)Wronskien\ \{ce_n(x,q), xce_n(x,q) + f_n(x,q)\}$$

$$= C_n(q)\{(ce_n(x,q))^2 + Wronskien\ \{ce_n(x,q), f_n(x,q)\}\}$$

$$\Rightarrow Wronskien\ \{ce_n(x,q), f_n(x,q)\} = \frac{ce_n(0,q)fe_n'(0,q)}{C_n(q)} - (ce_n(x,q))^2$$

$$Wronskien\ \{se_n(x,q), ge_n(x,q)\} = -se_n'(0,q)ge_n(0,q) = S_n(q)Wronskien\ \{se_n(x,q), xse_n(x,q) + g_n(x,q)\}$$

$$= S_n(q)\{(cse_n(x,q))^2 + Wronskien\ \{se_n(x,q), g_n(x,q)\}\}$$

$$\Rightarrow Wronskien\ \{se_n(x,q), g_n(x,q)\} = -\frac{se_n'(0,q)ge_n(0,q)}{S_n(q)} - (se_n(x,q))^2$$

*Les fonctions fn et gn suivent également les équations différentielles suivantes :*

$$ce_n''(x,q) + (\lambda - 2qCos(2x))ce_n(x,q) = 0 \quad fe_n(x,q) = C_n(q)\{x\,ce_n(x,q) + f_n(x,q)\}$$

$$fe_n''(x,q) + (\lambda - 2qCos(2x))fe_n(x,q) = 0 \Rightarrow x\,ce_n''(x,q) + 2ce_n'(x,q) + f_n''(x,q) + (\lambda - 2qCos(2x))\{x\,ce_n(x,q) + f_n(x,q)\} = 0$$

$$\Rightarrow f_n''(x,q) + (\lambda - 2qCos(2x))f_n(x,q) = -2ce_n'(x,q)$$

$$se_n''(x,q) + (\lambda - 2qCos(2x))se_n(x,q) = 0 \quad ge_n(x,q) = S_n(q)\{x\,se_n(x,q) + g_n(x,q)\}$$

$$ge_n''(x,q) + (\lambda - 2qCos(2x))ge_n(x,q) = 0 \Rightarrow x\,se_n''(x,q) + 2se_n'(x,q) + g_n''(x,q) + (\lambda - 2qCos(2x))\{x\,se_n(x,q) + g_n(x,q)\} = 0$$

$$\Rightarrow g_n''(x,q) + (\lambda - 2qCos(2x))g_n(x,q) = -2se_n'(x,q)$$

*Dans ce cas on peut également calculer le Wronskien avec les fonctions fn et gn :*

$$\begin{cases} ce_n''(x,q) + (\lambda - 2qCos(2x))ce_n(x,q) = 0 \\ f_n''(x,q) + (\lambda - 2qCos(2x))f_n(x,q) = -2ce_n'(x,q) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\{Wronskien\{ce_n(x), f_n(x,q)\}\} = -2ce_n(x,q)ce_n'(x,q) = -\frac{d}{dx}\{(ce_n(x,q))^2\}$$

$$\Rightarrow Wronskien\{ce_n(x,q), f_n(x,q)\} + (ce_n(x,q))^2 = Wronskien\{ce_n(0,q), f_n(0,q)\} + (ce_n(0,q))^2$$

$$Comme \quad f_n(x,q) = \frac{fe_n(x,q)}{C_n(q)} - x\,ce_n(x,q) \quad f_n'(x,q) = \frac{fe_n'(x,q)}{C_n(q)} - x\,ce_n'(x,q) - ce_n(x,q)$$

$$\Rightarrow Wronskien\{ce_n(x,q), f_n(x,q)\} + (ce_n(x,q))^2 = ce_n(0,q)\left(\frac{fe_n'(0,q)}{C_n(q)} - ce_n(0,q)\right) + (ce_n(0,q))^2 = ce_n(0,q)\frac{fe_n'(0,q)}{C_n(q)}$$

$$\begin{cases} se_n''(x,q) + (\lambda - 2qCos(2x))se_n(x,q) = 0 \\ g_n''(x,q) + (\lambda - 2qCos(2x))g_n(x,q) = -2se_n'(x,q) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\{Wronskien\{se_n(x,q), f_n(x,q)\}\} = -2se_n(x,q)se_n'(x,q) = -\frac{d}{dx}\{(se_n(x,q))^2\}$$

$$\Rightarrow Wronskien\{se_n(x,q), g_n(x,q)\} + (se_n(x,q))^2 = Cste = Wronskien\{se_n(0,q), g_n(0,q)\}$$

$$Comme \quad g_n(x,q) = \frac{ge_n(x,q)}{S_n(q)} - x\,se_n(x,q) \quad g_n'(x,q) = \frac{ge_n'(x,q)}{S_n(q)} - x\,se_n'(x,q) - se_n(x,q)$$

$$\Rightarrow Wronskien\{se_n(x,q), g_n(x,q)\} + (se_n(x,q))^2 = -\frac{se_n'(0,q)ge_n(x,q)}{S_n(q)}$$

*Ce qui donne, on l'avait espéré le même résultat.*

*Ces contraintes et propriétés suggèrent une méthode de construction par « perturbation » des*

*secondes solutions d'ordre n, paires et impaires. Tout d'abord perturbons la caractéristique de l'équation :*

$$\lambda = a(n,q) \Rightarrow \tilde{\lambda}_e(\varepsilon,n,q) = a(n,q)(1+\varepsilon) \quad e\ pour\ even$$
$$\Rightarrow Solution\ de\ y''(x) + (a(n,q)(1+\varepsilon) - 2qCos(2x))y(x) = 0 \Rightarrow ordre\ non\ entier\ \nu_e(\varepsilon,n,q)$$
$$\lambda = b(n,q) \Rightarrow \tilde{\lambda}_o(\varepsilon,n,q) = b(n,q)(1-\varepsilon) \quad o\ pour\ odd$$
$$\Rightarrow Solution\ de\ y''(x) + (b(n,q)(1-\varepsilon) - 2qCos(2x))y(x) = 0 \Rightarrow ordre\ non\ entier\ \nu_o(\varepsilon,n,q)$$

*Remarque : la perturbation sur $a_n(q)$ et $b_n(q)$ doivent être telles que l'on reste dans une zone dîtes de stabilité de l'équation angulaire de Mathieu. Soit $a_n(q)(1+\varepsilon)$ et $b_n(q)(1-\varepsilon)$*

*Puis construisons une seconde solution impaire par passage à la limite :*

$$\tilde{s}_n(\varepsilon,x,q) = se_{\nu_e(\varepsilon,n,q)}(x,q) \quad \tilde{C}(\varepsilon,n,q) = \frac{\tilde{s}_n(\varepsilon,2\pi,q) - \tilde{s}_n(\varepsilon,0,q)}{2\pi\, ce_n(0,q)}$$
$$\tilde{f}_n(\varepsilon,x,q) = \frac{\tilde{s}_n(\varepsilon,x,q)}{\tilde{C}(\varepsilon,n,q)} - x ce_n(x,q) \Rightarrow C_n(\varepsilon,q) = \sqrt{\frac{\pi}{\int_0^{2\pi} dx \left\{\tilde{f}_n(\varepsilon,x,q)\right\}^2}}$$
$$\Rightarrow fe_n(x,q) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{C_n(\varepsilon,q)\frac{\tilde{s}_n(\varepsilon,x,q)}{\tilde{C}(\varepsilon,n,q)}\right\}$$

*Pour la seconde solution paire, on donne le schéma de construction par passage à la limite :*

$$\tilde{c}_n(\varepsilon,x,q) = ce_{\nu_o(\varepsilon,n,q)}(x,q) \quad \tilde{c}_n'(\varepsilon,x,q) = \frac{d\, ce_{\nu_o(\varepsilon,n,q)}(x,q)}{dx} \quad \tilde{S}(\varepsilon,n,q) = \frac{\tilde{c}_n'(\varepsilon,2\pi,q) - \tilde{c}_n'(\varepsilon,0,q)}{2\pi\, se_n'(0,q)}$$
$$\tilde{g}_n(\varepsilon,x,q) = \frac{\tilde{c}_n(\varepsilon,x,q)}{\tilde{S}(\varepsilon,n,q)} - x se_n(x,q) \Rightarrow S_n(\varepsilon,q) = \sqrt{\frac{\pi}{\int_0^{2\pi} dx \left\{\tilde{g}_n(\varepsilon,x,q)\right\}^2}}$$
$$\Rightarrow ge_n(x,q) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{S_n(\varepsilon,q)\frac{\tilde{c}_n(\varepsilon,x,q)}{\tilde{S}(\varepsilon,n,q)}\right\}$$

.

*Les fonctions f et g « tilde » construites ont les bonnes propriétés de parité et de périodicité ou anti-périodicité sur π. Par ailleurs elles sont périodiques 2π, leurs valeurs étant les mêmes en 0 et 2π :*

$$\widetilde{s}_n(\varepsilon,x,q)=se_{\nu_e(\varepsilon,n,q)}(x,q)\quad \widetilde{C}(\varepsilon,n,q)=\frac{\widetilde{s}_n(\varepsilon,2\pi,q)-\widetilde{s}_n(\varepsilon,0,q)}{2\pi\, ce_n(0,q)}$$

$$\widetilde{f}_n(\varepsilon,x,q)=\frac{\widetilde{s}_n(\varepsilon,x,q)}{\widetilde{C}(\varepsilon,n,q)}-xce_n(x,q)\Rightarrow\begin{cases}\widetilde{f}_n(\varepsilon,0,q)=\dfrac{\widetilde{s}_n(\varepsilon,0,q)}{\widetilde{C}(\varepsilon,n,q)}\\ \widetilde{f}_n(\varepsilon,2\pi,q)=\dfrac{\widetilde{s}_n(\varepsilon,2\pi,q)}{\widetilde{C}(\varepsilon,n,q)}-2\pi ce_n(2\pi,q)=\dfrac{\widetilde{s}_n(\varepsilon,0,q)}{\widetilde{C}(\varepsilon,n,q)}\end{cases}$$

$$\widetilde{c}_n(\varepsilon,x,q)=ce_{\nu_o(\varepsilon,n,q)}(x,q)\quad \widetilde{S}(\varepsilon,n,q)=\frac{\widetilde{c}_n'(\varepsilon,2\pi,q)-\widetilde{c}_n'(\varepsilon,0,q)}{2\pi\, se_n'(0,q)}$$

$$\widetilde{g}_n(\varepsilon,x,q)=\frac{\widetilde{c}_n(\varepsilon,x,q)}{\widetilde{S}(\varepsilon,n,q)}-xse_n(x,q)\Rightarrow \widetilde{g}_n'(\varepsilon,x,q)=\frac{\widetilde{c}_n'(\varepsilon,x,q)}{\widetilde{S}(\varepsilon,n,q)}-xse_n'(x,q)-se_n(x,q)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\widetilde{g}_n'(\varepsilon,0,q)=\dfrac{\widetilde{c}_n'(\varepsilon,0,q)}{\widetilde{S}(\varepsilon,n,q)}-se_n(0,q)=\dfrac{\widetilde{c}_n'(\varepsilon,0,q)}{\widetilde{S}(\varepsilon,n,q)}\\ \widetilde{g}_n'(\varepsilon,2\pi,q)=\dfrac{\widetilde{c}_n'(\varepsilon,2\pi,q)}{\widetilde{S}(\varepsilon,n,q)}-2\pi se_n'(2\pi,q)-se_n(2\pi,q)=\dfrac{\widetilde{c}_n'(\varepsilon,0,q)}{\widetilde{S}(\varepsilon,n,q)}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\widetilde{g}_n(\varepsilon,0,q)=\dfrac{\widetilde{c}_n(\varepsilon,0,q)}{\widetilde{S}(\varepsilon,n,q)}\qquad \widetilde{g}_n(\varepsilon,2\pi,q)=\dfrac{\widetilde{c}_n(\varepsilon,2\pi,q)}{\widetilde{S}(\varepsilon,n,q)}-2\pi se_n(2\pi,q)=\dfrac{\widetilde{c}_n(\varepsilon,2\pi,q)}{\widetilde{S}(\varepsilon,n,q)}\\ \widetilde{g}_n(\varepsilon,2\pi,q)-\widetilde{g}_n(\varepsilon,0,q)=\dfrac{\widetilde{c}_n(\varepsilon,2\pi,q)-\widetilde{c}_n(\varepsilon,0,q)}{\widetilde{S}(\varepsilon,n,q)}\quad et\quad \underset{\varepsilon\to 0}{Lim}\{\widetilde{c}_n(\varepsilon,2\pi,q)-\widetilde{c}_n(\varepsilon,0,q)\}=0\end{cases}$$

*Les fonctions construites respectent bien les valeurs des Wronskiens entre première et seconde solutions :*

$$Wronskien\,\{ce_n(x,q),fe_n(x,q)\}=\underset{\varepsilon\to 0}{Lim}\left\{\frac{C_n(\varepsilon,q)}{\widetilde{C}(\varepsilon,n,q)}Wronskien\,\{ce_n(x,q),\widetilde{s}_n(\varepsilon,x,q)\}\right\}$$

$$Wronskien\,\{se_n(x,q),ge_n(x,q)\}=\underset{\varepsilon\to 0}{Lim}\left\{\frac{S_n(\varepsilon,q)}{\widetilde{S}(\varepsilon,n,q)}Wronskien\,\{se_n(x,q),\widetilde{c}_n(\varepsilon,x,q)\}\right\}$$

*Or :*

$$\begin{cases}ce_n''(x,q)+(a(n,q)-2qCos(2x))ce_n(x,q)=0\\ \widetilde{s}_n''(\varepsilon,x,q)+(a(n,q)(1+\varepsilon)-2qCos(2x))\widetilde{s}_n(\varepsilon,x,q)=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\frac{d}{dx}\{Wronskien\{ce_n(x,q),\widetilde{s}_n(\varepsilon,x,q)\}\}=-\varepsilon\, a(n,q)ce_n(x,q)\widetilde{s}_n(\varepsilon,x,q)$$

$$\Rightarrow Wronskien\{ce_n(x,q),\widetilde{s}_n(\varepsilon,x,q)\}=ce_n(0,q)\widetilde{s}_n'(\varepsilon,0,q)-\varepsilon\, a(n,q)\int_0^x dy\, ce_n(y,q)\widetilde{s}_n(\varepsilon,y,q)$$

$$\begin{cases}se_n''(x,q)+(b(n,q)-2qCos(2x))se_n(x,q)=0\\ \widetilde{c}_n''(\varepsilon,x,q)+(b(n,q)(1-\varepsilon)-2qCos(2x))\widetilde{c}_n(\varepsilon,x,q)=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\frac{d}{dx}\{Wronskien\{se_n(x,q),\widetilde{c}_n(\varepsilon,x,q)\}\}=\varepsilon\, b(n,q)se_n(x,q)\widetilde{c}_n(\varepsilon,x,q)$$

$$\Rightarrow Wronskien\{se_n(x,q),\widetilde{c}_n(\varepsilon,x,q)\}=-se_n'(0,q)\widetilde{c}_n(\varepsilon,0,q)+\varepsilon\, b(n,q)\int_0^x dy\, se_n(y,q)\widetilde{c}_n(\varepsilon,y,q)$$

*Comme les deux passages à la limite définissent les fonctions solutions :*

$$\begin{cases} Wronskien\ \{ce_n(x,q), fe_n(x,q)\} = \underset{\varepsilon\to 0}{Lim}\left\{\dfrac{C_n(\varepsilon,q)}{\widetilde{C}(\varepsilon,n,q)} Wronskien\ \{ce_n(x,q), \widetilde{s}_n(\varepsilon,x,q)\}\right\} \\ Wronskien\{ce_n(x,q), \widetilde{s}_n(\varepsilon,x,q)\} = ce_n(0,q)\widetilde{s}_n'(\varepsilon,0,q) + O(\varepsilon) \\ fe_n(x,q) = \underset{\varepsilon\to 0}{Lim}\left\{C_n(\varepsilon,q)\dfrac{\widetilde{s}_n(\varepsilon,x,q)}{\widetilde{C}(\varepsilon,n,q)}\right\} \Rightarrow fe_n'(x,q) = \underset{\varepsilon\to 0}{Lim}\left\{C_n(\varepsilon,q)\dfrac{\widetilde{s}_n'(\varepsilon,x,q)}{\widetilde{C}(\varepsilon,n,q)}\right\} \end{cases}$$

$$\Rightarrow Wronskien\ \{ce_n(x,q), fe_n(x,q)\} = ce_n(0,q)\underset{\varepsilon\to 0}{Lim}\left\{\frac{C_n(\varepsilon,q)}{\widetilde{C}(\varepsilon,n,q)}\widetilde{s}_n'(\varepsilon,0,q)\right\} = ce_n(0,q) fe_n'(0,q)$$

$$\begin{cases} Wronskien\ \{se_n(x,q), ge_n(x,q)\} = \underset{\varepsilon\to 0}{Lim}\left\{\dfrac{S_n(\varepsilon,q)}{\widetilde{S}(\varepsilon,n,q)} Wronskien\ \{se_n(x,q), \widetilde{c}_n(\varepsilon,x,q)\}\right\} \\ Wronskien\{se_n(x,q), \widetilde{c}_n(\varepsilon,x,q)\} = -se_n'(0,q)\widetilde{c}_n(\varepsilon,0,q) + O(\varepsilon) \\ ge_n(x,q) = \underset{\varepsilon\to 0}{Lim}\left\{S_n(\varepsilon,q)\dfrac{\widetilde{c}_n(\varepsilon,x,q)}{\widetilde{S}(\varepsilon,n,q)}\right\} \end{cases}$$

$$\Rightarrow Wronskien\ \{se_n(x,q), ge_n(x,q)\} = -se_n'(0,q)\underset{\varepsilon\to 0}{Lim}\left\{S_n(\varepsilon,q)\frac{\widetilde{c}_n(\varepsilon,0,q)}{\widetilde{S}(\varepsilon,n,q)}\right\} = -se_n'(0,q) ge_n(0,q)$$

*Les Wronskiens obtenus par ce passage à la limite sont donc les mêmes. C'est encore un bon indice que la construction semble licite. On peut facilement réaliser une implémentation du processus de passage à la limite sur Mathematica, en prenant une variable ε très petite de l'ordre de 10-13, mais il est très gourmand en temps de calcul. Il est plus facile de construire les secondes solutions à l'aide des coefficients de Fourier des premières solutions, grâce au résultat suivant d'existence de développement en produit de fonctions de Bessel.*

*Comme nous venons de l'annoncer, il existe également un développement en série de produit de fonctions de Bessel pour les fonctions angulaires de première :*

$$ce_{2n}(z,q) = \frac{ce_{2n}(0,q)\sum_{l=0}^{l=\infty}(-1)^l A_{2l}^{(2n)} \operatorname{Re}\left\{J_l\left(\sqrt{q}e^{iz}\right)J_l\left(\sqrt{q}e^{-iz}\right)\right\}}{\sum_{l=0}^{l=\infty}(-1)^l A_{2l}^{(2n)}\left\{J_l\left(\sqrt{q}\right)\right\}^2}$$

$$ce_{2n+1}(z,q) = \frac{ce_{2n+1}(0,q)\sum_{l=0}^{l=\infty}(-1)^l A_{2l+1}^{(2n+1)} \operatorname{Re}\left\{J_l\left(\sqrt{q}e^{iz}\right)J_{l+1}\left(\sqrt{q}e^{-iz}\right) + J_{l+1}\left(\sqrt{q}e^{iz}\right)J_l\left(\sqrt{q}e^{-iz}\right)\right\}}{2\sum_{l=0}^{l=\infty}(-1)^l A_{2l+1}^{(2n+1)} J_l\left(\sqrt{q}\right)J_{l+1}\left(\sqrt{q}\right)}$$

$$se_{2n+1}(z,q) = \frac{\dfrac{\partial se_{2n+1}(0,q)}{\partial z}\sum_{l=0}^{l=\infty}(-1)^l B_{2l+1}^{(2n+1)} \operatorname{Im}\left\{J_l\left(\sqrt{q}e^{iz}\right)J_{l+1}\left(\sqrt{q}e^{-iz}\right) - J_{l+1}\left(\sqrt{q}e^{iz}\right)J_l\left(\sqrt{q}e^{-iz}\right)\right\}}{\sqrt{q}\sum_{l=0}^{l=\infty}(-1)^l B_{2l+1}^{(2n+1)}\left\{J_{l+1}\left(\sqrt{q}\right)\left(J_{l-1}\left(\sqrt{q}\right) - J_{l+1}\left(\sqrt{q}\right)\right) - J_l\left(\sqrt{q}\right)\left(J_l\left(\sqrt{q}\right) - J_{l+2}\left(\sqrt{q}\right)\right)\right\}}$$

$$se_{2n+2}(z,q) = \frac{\dfrac{\partial se_{2n+2}(0,q)}{\partial z}\sum_{l=0}^{l=\infty}(-1)^l B_{2l+2}^{(2n+2)} \operatorname{Im}\left\{J_l\left(\sqrt{q}e^{iz}\right)J_{l+2}\left(\sqrt{q}e^{-iz}\right) - J_{l+2}\left(\sqrt{q}e^{iz}\right)J_l\left(\sqrt{q}e^{-iz}\right)\right\}}{\sqrt{q}\sum_{l=0}^{l=\infty}(-1)^l B_{2l+2}^{(2n+2)}\left\{J_{l+2}\left(\sqrt{q}\right)\left(J_{l-1}\left(\sqrt{q}\right) - J_{l+1}\left(\sqrt{q}\right)\right) - J_l\left(\sqrt{q}\right)\left(J_{l+1}\left(\sqrt{q}\right) - J_{l+3}\left(\sqrt{q}\right)\right)\right\}}$$

*Et pour les fonctions angulaires de deuxième espèce :*

$$fe_{2n}(z,q) = \frac{2\sum_{l=0}^{l=\infty}(-1)^l A_{2l}^{(2n)} \operatorname{Im}\left\{J_l\left(\sqrt{q}e^{iz}\right)Y_l\left(\sqrt{q}e^{-iz}\right)\right\}}{ce_{2n}(0,q)\sqrt{q}\sum_{l=0}^{l=\infty}(-1)^l A_{2l}^{(2n)}\left\{Y_l\left(\sqrt{q}\right)\left(J_{l-1}\left(\sqrt{q}\right)-J_{l+1}\left(\sqrt{q}\right)\right)-J_l\left(\sqrt{q}\right)\left(Y_{l-1}\left(\sqrt{q}\right)-Y_{l+1}\left(\sqrt{q}\right)\right)\right\}}$$

$$fe_{2n+1}(z,q) = \frac{2\sum_{l=0}^{l=\infty}(-1)^l A_{2l+1}^{(2n+1)} \operatorname{Im}\left\{J_l\left(\sqrt{q}e^{iz}\right)Y_{l+1}\left(\sqrt{q}e^{-iz}\right)+J_{l+1}\left(\sqrt{q}e^{iz}\right)Y_l\left(\sqrt{q}e^{-iz}\right)\right\}}{ce_{2n+1}(0,q)\sqrt{q}\sum_{l=0}^{l=\infty}(-1)^l A_{2l+1}^{(2n+1)}\left\{\begin{array}{l}Y_l\left(\sqrt{q}\right)\left(J_l\left(\sqrt{q}\right)-J_{l+2}\left(\sqrt{q}\right)\right)+Y_{l+1}\left(\sqrt{q}\right)\left(J_{l-1}\left(\sqrt{q}\right)-J_{l+1}\left(\sqrt{q}\right)\right)\\-J_l\left(\sqrt{q}\right)\left(Y_l\left(\sqrt{q}\right)-Y_{l+2}\left(\sqrt{q}\right)\right)-J_{l+1}\left(\sqrt{q}\right)\left(Y_{l-1}\left(\sqrt{q}\right)-Y_{l+1}\left(\sqrt{q}\right)\right)\end{array}\right\}}$$

$$ge_{2n+1}(z,q) = \frac{\sum_{l=0}^{l=\infty}(-1)^l B_{2l+1}^{(2n+1)} \operatorname{Re}\left\{J_l\left(\sqrt{q}e^{iz}\right)Y_{l+1}\left(\sqrt{q}e^{-iz}\right)-J_{l+1}\left(\sqrt{q}e^{iz}\right)Y_l\left(\sqrt{q}e^{-iz}\right)\right\}}{\frac{\partial se_{2n+1}(0,q)}{\partial z}\sum_{l=0}^{l=\infty}(-1)^l B_{2l+1}^{(2n+1)}\left\{J_l\left(\sqrt{q}\right)Y_{l+1}\left(\sqrt{q}\right)-J_{l+1}\left(\sqrt{q}\right)Y_l\left(\sqrt{q}\right)\right\}}$$

$$ge_{2n+2}(z,q) = \frac{\sum_{l=0}^{l=\infty}(-1)^l B_{2l+2}^{(2n+2)} \operatorname{Re}\left\{J_l\left(\sqrt{q}e^{iz}\right)Y_{l+2}\left(\sqrt{q}e^{-iz}\right)-J_{l+2}\left(\sqrt{q}e^{iz}\right)Y_l\left(\sqrt{q}e^{-iz}\right)\right\}}{\frac{\partial se_{2n+2}(0,q)}{\partial z}\sum_{l=0}^{l=\infty}(-1)^l B_{2l+2}^{(2n+2)}\left\{J_l\left(\sqrt{q}\right)Y_{l+2}\left(\sqrt{q}\right)-J_{l+2}\left(\sqrt{q}\right)Y_l\left(\sqrt{q}\right)\right\}}$$

.

*Ces dernières formules sont plus faciles à implémenter sur l'intervalle [0,π] puis en utilisant les formules d'extension à tous les intervalles, d'abord [π,2π ] puis tous les autres par translation de 2π et parité pour les valeurs négatives.*

*Remarque importante : les formules en série de produit de fonctions de Bessel des fonctions de deuxième espèce correspondent à une normalisation différentes. Dans ce cas on choisit un système de fonctions de première et deux espèces tel que le Wronkien soit égal à un, à l'image des fonctions usuelles sinusoïdales :* $\begin{cases} Wronskien\ \{ce_n(x,q), fe_n(x,q)\} = 1 \\ Wronskien\ \{se_n(x,q), ge_n(x,q)\} = -1 \end{cases}$.

*Pour ce qui est des dérivées premières des fonctions angulaires de première espèce, nous obtenons :*

$$ce_{2n}(z,q) = -\frac{ce_{2n}(0,q)\sum_{l=0}^{l=\infty}(-1)^l A_{2l}^{(2n)}\,\mathrm{Im}\left\{\begin{array}{l} -\sqrt{q}e^{-iz}J_l\left(\sqrt{q}e^{iz}\right)\left(J_{l-1}\left(\sqrt{q}e^{-iz}\right)-J_{l+1}\left(\sqrt{q}e^{-iz}\right)\right)+ \\ +\sqrt{q}e^{iz}J_l\left(\sqrt{q}e^{-iz}\right)\left(J_{l+1}\left(\sqrt{q}e^{iz}\right)-J_{l-1}\left(\sqrt{q}e^{iz}\right)\right) \end{array}\right\}}{2\sum_{l=0}^{l=\infty}(-1)^l A_{2l}^{(2n)}\left\{J_l\left(\sqrt{q}\right)\right\}^2}$$

$$ce_{2n+1}(z,q) = -\frac{ce_{2n+1}(0,q)\sum_{l=0}^{l=\infty}(-1)^l A_{2l+1}^{(2n+1)}\,\mathrm{Im}\left\{\begin{array}{l} -\sqrt{q}e^{-iz}\left\{\begin{array}{l} J_l\left(\sqrt{q}e^{iz}\right)\left(J_l\left(\sqrt{q}e^{-iz}\right)-J_{l+2}\left(\sqrt{q}e^{-iz}\right)\right)+ \\ +J_{l+1}\left(\sqrt{q}e^{iz}\right)\left(J_{l-1}\left(\sqrt{q}e^{-iz}\right)-J_{l+1}\left(\sqrt{q}e^{-iz}\right)\right) \end{array}\right\} \\ +\sqrt{q}e^{iz}\left\{\begin{array}{l} J_{l+1}\left(\sqrt{q}e^{-iz}\right)\left(J_{l-1}\left(\sqrt{q}e^{iz}\right)-J_{l+1}\left(\sqrt{q}e^{iz}\right)\right)+ \\ +J_l\left(\sqrt{q}e^{-iz}\right)\left(J_l\left(\sqrt{q}e^{iz}\right)-J_{l+2}\left(\sqrt{q}e^{iz}\right)\right) \end{array}\right\} \end{array}\right\}}{2\sum_{l=0}^{l=\infty}(-1)^l A_{2l+1}^{(2n+1)}J_l\left(\sqrt{q}\right)J_{l+1}\left(\sqrt{q}\right)}$$

$$se_{2n+1}(z,q) = \frac{\frac{\partial se_{2n+1}(0,q)}{\partial z}\sum_{l=0}^{l=\infty}(-1)^l B_{2l+1}^{(2n+1)}\,\mathrm{Re}\left\{\begin{array}{l} \sqrt{q}e^{-iz}\left\{\begin{array}{l} -J_l\left(\sqrt{q}e^{iz}\right)\left(J_l\left(\sqrt{q}e^{-iz}\right)-J_{l+2}\left(\sqrt{q}e^{-iz}\right)\right)+ \\ +J_{l+1}\left(\sqrt{q}e^{iz}\right)\left(J_{l-1}\left(\sqrt{q}e^{-iz}\right)-J_{l+1}\left(\sqrt{q}e^{-iz}\right)\right) \end{array}\right\} \\ +\sqrt{q}e^{iz}\left\{\begin{array}{l} J_{l+1}\left(\sqrt{q}e^{-iz}\right)\left(J_{l-1}\left(\sqrt{q}e^{iz}\right)-J_{l+1}\left(\sqrt{q}e^{iz}\right)\right)- \\ -J_l\left(\sqrt{q}e^{-iz}\right)\left(J_l\left(\sqrt{q}e^{iz}\right)-J_{l+2}\left(\sqrt{q}e^{iz}\right)\right) \end{array}\right\} \end{array}\right\}}{\sqrt{q}\sum_{l=0}^{l=\infty}(-1)^l B_{2l+1}^{(2n+1)}\left\{J_{l+1}\left(\sqrt{q}\right)\left(J_{l-1}\left(\sqrt{q}\right)-J_{l+1}\left(\sqrt{q}\right)\right)-J_l\left(\sqrt{q}\right)\left(J_l\left(\sqrt{q}\right)-J_{l+2}\left(\sqrt{q}\right)\right)\right\}}$$

$$se_{2n+2}(z,q) = \frac{\frac{\partial se_{2n+2}(0,q)}{\partial z}\sum_{l=0}^{l=\infty}(-1)^l B_{2l+2}^{(2n+2)}\,\mathrm{Re}\left\{\begin{array}{l} \sqrt{q}e^{-iz}\left\{\begin{array}{l} -J_l\left(\sqrt{q}e^{iz}\right)\left(J_{l+1}\left(\sqrt{q}e^{-iz}\right)-J_{l+3}\left(\sqrt{q}e^{-iz}\right)\right)+ \\ +J_{l+2}\left(\sqrt{q}e^{iz}\right)\left(J_{l-1}\left(\sqrt{q}e^{-iz}\right)-J_{l+1}\left(\sqrt{q}e^{-iz}\right)\right) \end{array}\right\} \\ +\sqrt{q}e^{iz}\left\{\begin{array}{l} J_{l+2}\left(\sqrt{q}e^{-iz}\right)\left(J_{l-1}\left(\sqrt{q}e^{iz}\right)-J_{l+1}\left(\sqrt{q}e^{iz}\right)\right)- \\ -J_l\left(\sqrt{q}e^{-iz}\right)\left(J_{l+1}\left(\sqrt{q}e^{iz}\right)-J_{l+3}\left(\sqrt{q}e^{iz}\right)\right) \end{array}\right\} \end{array}\right\}}{\sqrt{q}\sum_{l=0}^{l=\infty}(-1)^l B_{2l+2}^{(2n+2)}\left\{J_{l+2}\left(\sqrt{q}\right)\left(J_{l-1}\left(\sqrt{q}\right)-J_{l+1}\left(\sqrt{q}\right)\right)-J_l\left(\sqrt{q}\right)\left(J_{l+1}\left(\sqrt{q}\right)-J_{l+3}\left(\sqrt{q}\right)\right)\right\}}$$

*Et pour les dérivées premières des fonctions angulaires de deuxième espèce :*

$$fe_{2n}(z,q)=\frac{2\sum_{l=0}^{l=\infty}(-1)^l A_{2l}^{(2n)}\,\mathrm{Re}\left\{\begin{array}{l}-\sqrt{q}e^{-iz}J_l\left(\sqrt{q}e^{iz}\right)\left(Y_{l-1}\left(\sqrt{q}e^{-iz}\right)-Y_{l+1}\left(\sqrt{q}e^{-iz}\right)\right)+\\+\sqrt{q}e^{iz}Y_l\left(\sqrt{q}e^{-iz}\right)\left(J_{l+1}\left(\sqrt{q}e^{iz}\right)-J_{l-1}\left(\sqrt{q}e^{iz}\right)\right)\end{array}\right\}}{ce_{2n}(0,q)\sqrt{q}\sum_{l=0}^{l=\infty}(-1)^l A_{2l}^{(2n)}\left\{Y_l\left(\sqrt{q}\right)\left(J_{l-1}\left(\sqrt{q}\right)-J_{l+1}\left(\sqrt{q}\right)\right)-J_l\left(\sqrt{q}\right)\left(Y_{l-1}\left(\sqrt{q}\right)-Y_{l+1}\left(\sqrt{q}\right)\right)\right\}}$$

$$fe_{2n+1}(z,q)=\frac{2\sum_{l=0}^{l=\infty}(-1)^l A_{2l+1}^{(2n+1)}\,\mathrm{Re}\left\{\begin{array}{l}-\sqrt{q}e^{-iz}\left\{\begin{array}{l}J_l\left(\sqrt{q}e^{iz}\right)\left(Y_l\left(\sqrt{q}e^{-iz}\right)-Y_{l+2}\left(\sqrt{q}e^{-iz}\right)\right)+\\+J_{l+1}\left(\sqrt{q}e^{iz}\right)\left(Y_{l-1}\left(\sqrt{q}e^{-iz}\right)-Y_{l+1}\left(\sqrt{q}e^{-iz}\right)\right)\end{array}\right\}\\+\sqrt{q}e^{iz}\left\{\begin{array}{l}Y_{l+1}\left(\sqrt{q}e^{-iz}\right)\left(J_{l-1}\left(\sqrt{q}e^{iz}\right)-J_{l+1}\left(\sqrt{q}e^{iz}\right)\right)+\\+Y_l\left(\sqrt{q}e^{-iz}\right)\left(J_l\left(\sqrt{q}e^{iz}\right)-J_{l+2}\left(\sqrt{q}e^{iz}\right)\right)\end{array}\right\}\end{array}\right\}}{ce_{2n+1}(0,q)\sqrt{q}\sum_{l=0}^{l=\infty}(-1)^l A_{2l+1}^{(2n+1)}\left\{\begin{array}{l}Y_l\left(\sqrt{q}\right)\left(J_l\left(\sqrt{q}\right)-J_{l+2}\left(\sqrt{q}\right)\right)+Y_{l+1}\left(\sqrt{q}\right)\left(J_{l-1}\left(\sqrt{q}\right)-J_{l+1}\left(\sqrt{q}\right)\right)\\-J_l\left(\sqrt{q}\right)\left(Y_l\left(\sqrt{q}\right)-Y_{l+2}\left(\sqrt{q}\right)\right)-J_{l+1}\left(\sqrt{q}\right)\left(Y_{l-1}\left(\sqrt{q}\right)-Y_{l+1}\left(\sqrt{q}\right)\right)\end{array}\right\}}$$

$$ge_{2n+1}(z,q)=-\frac{\sum_{l=0}^{l=\infty}(-1)^l B_{2l+1}^{(2n+1)}\,\mathrm{Im}\left\{\begin{array}{l}\sqrt{q}e^{-iz}\left\{\begin{array}{l}-J_l\left(\sqrt{q}e^{iz}\right)\left(Y_l\left(\sqrt{q}e^{-iz}\right)-Y_{l+2}\left(\sqrt{q}e^{-iz}\right)\right)+\\+J_{l+1}\left(\sqrt{q}e^{iz}\right)\left(Y_{l-1}\left(\sqrt{q}e^{-iz}\right)-Y_{l+1}\left(\sqrt{q}e^{-iz}\right)\right)\end{array}\right\}\\+\sqrt{q}e^{iz}\left\{\begin{array}{l}Y_{l+1}\left(\sqrt{q}e^{-iz}\right)\left(J_{l-1}\left(\sqrt{q}e^{iz}\right)-J_{l+1}\left(\sqrt{q}e^{iz}\right)\right)-\\-Y_l\left(\sqrt{q}e^{-iz}\right)\left(J_l\left(\sqrt{q}e^{iz}\right)-J_{l+2}\left(\sqrt{q}e^{iz}\right)\right)\end{array}\right\}\end{array}\right\}}{\frac{\partial se_{2n+1}(0,q)}{\partial z}\sum_{l=0}^{l=\infty}(-1)^l B_{2l+1}^{(2n+1)}\left\{J_l\left(\sqrt{q}\right)Y_{l+1}\left(\sqrt{q}\right)-J_{l+1}\left(\sqrt{q}\right)Y_l\left(\sqrt{q}\right)\right\}}$$

$$ge_{2n+2}(z,q)=-\frac{\sum_{l=0}^{l=\infty}(-1)^l B_{2l+2}^{(2n+2)}\,\mathrm{Im}\left\{\begin{array}{l}\sqrt{q}e^{-iz}\left\{\begin{array}{l}-J_l\left(\sqrt{q}e^{iz}\right)\left(Y_{l+1}\left(\sqrt{q}e^{-iz}\right)-Y_{l+3}\left(\sqrt{q}e^{-iz}\right)\right)+\\+J_{l+2}\left(\sqrt{q}e^{iz}\right)\left(Y_{l-1}\left(\sqrt{q}e^{-iz}\right)-Y_{l+1}\left(\sqrt{q}e^{-iz}\right)\right)\end{array}\right\}\\+\sqrt{q}e^{iz}\left\{\begin{array}{l}Y_{l+2}\left(\sqrt{q}e^{-iz}\right)\left(J_{l-1}\left(\sqrt{q}e^{iz}\right)-J_{l+1}\left(\sqrt{q}e^{iz}\right)\right)-\\-Y_l\left(\sqrt{q}e^{-iz}\right)\left(J_{l+1}\left(\sqrt{q}e^{iz}\right)-J_{l+3}\left(\sqrt{q}e^{iz}\right)\right)\end{array}\right\}\end{array}\right\}}{\frac{\partial se_{2n+2}(0,q)}{\partial z}\sum_{l=0}^{l=\infty}(-1)^l B_{2l+2}^{(2n+2)}\left\{J_l\left(\sqrt{q}\right)Y_{l+2}\left(\sqrt{q}\right)-J_{l+2}\left(\sqrt{q}\right)Y_l\left(\sqrt{q}\right)\right\}}$$

***<u>Développement limité des solutions angulaires d'ordre entier de l'équation de Mathieu dans le cas d'un paramètre q proche de 0</u>** : pour ce qui est des nombres caractéristiques, les développements limités à l'ordre 10 en q sont de la forme :*

$$\lambda(\nu,q)\to\{a_n(q),b_n(q)\}\quad avec\quad a_n(q)-b_n(q)\approx\frac{2q^n}{\left(2^{n-1}(n-1)!\right)^2}\left(1+O\left(q^2\right)\right)\Rightarrow\quad a_0(q)\approx-\frac{1}{2}q^2+\frac{7}{128}q^4-\frac{29}{2304}q^6+\frac{68687}{18874368}q^8-\frac{123707}{104857600}q^{10}+\cdots$$

$$a_1(q)\approx1+q-\frac{1}{8}q^2-\frac{1}{64}q^3-\frac{1}{1536}q^4+\frac{11}{36864}q^5+\frac{49}{589824}q^6+\frac{55}{9437184}q^7-\frac{83}{35389440}q^8-\frac{12121}{15099494400}q^9-\frac{114299}{1630745395200}q^{10}+\cdots$$

$$b_1(q)\approx1-q-\frac{1}{8}q^2+\frac{1}{64}q^3-\frac{1}{1536}q^4-\frac{11}{36864}q^5+\frac{49}{589824}q^6-\frac{55}{9437184}q^7-\frac{83}{35389440}q^8+\frac{12121}{15099494400}q^9-\frac{114299}{1630745395200}q^{10}\cdots$$

$$a_2(q)\approx4+\frac{5}{12}q^2-\frac{763}{13824}q^4+\frac{1002401}{79626240}q^6-\frac{1669068401}{458647142400}q^8+\frac{4363384401463}{3698530556313600}q^{10}+\cdots$$

$$b_2(q)\approx4-\frac{1}{12}q^2+\frac{5}{13824}q^4-\frac{289}{79626240}q^6+\frac{21391}{458647142400}q^8-\frac{2499767}{3698530556313600}q^{10}+\cdots$$

$$a_3(q)\approx9+\frac{1}{16}q^2+\frac{1}{64}q^3+\frac{13}{20480}q^4-\frac{5}{16384}q^5-\frac{1961}{23592960}q^6-\frac{609}{104857600}q^7+\frac{4957199}{2113929216000}q^8+\frac{872713}{1087163596800}q^9+\frac{421511}{6012954214400}q^{10}+\cdots$$

$$b_3(q)\approx9+\frac{1}{16}q^2-\frac{1}{64}q^3+\frac{13}{20480}q^4+\frac{5}{16384}q^5-\frac{1961}{23592960}q^6+\frac{609}{104857600}q^7+\frac{4957199}{2113929216000}q^8-\frac{872713}{1087163596800}q^9+\frac{421511}{6012954214400}q^{10}+\cdots$$

$$a_4(q)\approx16+\frac{1}{30}q^2+\frac{433}{864000}q^4-\frac{5701}{2721600000}q^6-\frac{112236997}{2006581248000000}q^8+\frac{8417126443}{316036546560000000000}q^{10}+\cdots$$

$$b_4(q)\approx16+\frac{1}{30}q^2-\frac{317}{864000}q^4+\frac{10049}{2721600000}q^6-\frac{93824197}{2006581248000000}q^8+\frac{21359366443}{316036546560000000000}q^{10}+\cdots$$

$$a_5(q)\approx25+\frac{1}{48}q^2+\frac{11}{774144}q^4+\frac{1}{147456}q^5+\frac{37}{891813888}q^6-\frac{7}{339738624}q^7+\frac{63439}{201364441399296}q^8-\frac{1}{2130840649728}q^9-\frac{60609509}{5799295912299724800}q^{10}+\cdots$$

$$b_5(q)\approx25+\frac{1}{48}q^2+\frac{11}{774144}q^4-\frac{1}{147456}q^5+\frac{37}{891813888}q^6+\frac{7}{339738624}q^7+\frac{63439}{201364441399296}q^8+\frac{1}{2130840649728}q^9-\frac{60609509}{5799295912299724800}q^{10}\cdots$$

$$a_6(q)\approx36+\frac{1}{70}q^2+\frac{187}{43904000}q^4+\frac{6743617}{92935987200000}q^6-\frac{2337184771}{23315780468736000000}q^8+\frac{107856094183}{15958356409712640000000000}q^{10}+\cdots$$

$$b_6(q)\approx36+\frac{1}{70}q^2+\frac{187}{43904000}q^4+\frac{5861633}{92935987200000}q^6+\frac{2825925629}{23315780468736000000}q^8+\frac{45361065433}{15958356409712640000000000}q^{10}+\cdots$$

$$a_7(q)\approx49+\frac{q^2}{96}+\frac{7}{4423680}q^4+\frac{17}{20384317440}q^6+\frac{q^7}{2123366400}+\frac{80617}{103324028239872000}q^8-\frac{q^9}{2174327193600}+\frac{22381}{19044684885173207040}q^{10}+\cdots$$

$$b_7(q)\approx49+\frac{q^2}{96}+\frac{7}{4423680}q^4+\frac{17}{20384317440}q^6-\frac{q^7}{2123366400}+\frac{80617}{103324028239872000}q^8+\frac{q^9}{2174327193600}+\frac{22381}{19044684885173207040}q^{10}+\cdots$$

$$a_8(q)\approx64+\frac{q^2}{126}+\frac{109}{160030080}q^4+\frac{2707}{13973506525440}q^6+\frac{56675690063}{22716763094823469056000}q^8-\frac{8826844303}{608891857352522874224640 0}q^{10}+\cdots$$

$$b_8(q)\approx64+\frac{q^2}{126}+\frac{109}{160030080}q^4+\frac{2707}{13973506525440}q^6+\frac{52492329667}{22716763094823469056000}q^8-\frac{9604120067}{6088918573525228742246400}q^{10}+\cdots$$

$$a_9(q)\approx81+\frac{q^2}{160}+\frac{103}{315392000}q^4+\frac{1993}{36333158400000}q^6+\frac{425125339}{28676616703967232000000}q^8+\frac{q^9}{106542032486400}+\frac{1130345443}{20392260767265587200000000}q^{10}+\cdots$$

$$b_9(q)\approx81+\frac{q^2}{160}+\frac{103}{315392000}q^4+\frac{1993}{36333158400000}q^6+\frac{425125339}{28676616703967232000000}q^8-\frac{q^9}{106542032486400}+\frac{1130345443}{20392260767265587200000000}q^{10}+\cdots$$

$$a_{10}(q)\approx100+\frac{q^2}{198}+\frac{169}{993586176}q^4+\frac{31943}{1772341136197632}q^6+\frac{1704670559}{5692036047134061766 90176}q^8+\frac{370335410859899}{12496432546743250420538529546240}q^{10}+\cdots$$

$$b_{10}(q)\approx100+\frac{q^2}{198}+\frac{169}{993586176}q^4+\frac{31943}{1772341136197632}q^6+\frac{1704670559}{569203604713406176690176}q^8-\frac{1768418729052839}{62482162733716252102692647731200}q^{10}+\cdots$$

$$Pour\ n>10\quad \begin{matrix}a_n(q)\\ b_n(q)\end{matrix}\approx\left\{\begin{matrix}n^2+\frac{1}{2\left(n^2-1\right)}q^2+\frac{7+5n^2}{32\left(n^2-1\right)^3\left(n^2-4\right)}q^4+\frac{29+58n^2+9n^4}{64\left(n^2-1\right)^5\left(n^2-4\right)\left(n^2-9\right)}q^6+\frac{274748+827565n^2+64228n^4-140354n^6+9144n^8+1469n^{10}}{8192\left(n^2-1\right)^7\left(n^2-4\right)^3\left(n^2-9\right)\left(n^2-16\right)}q^8+\\ +\frac{4453452+20651309n^2+13541915n^4-2844430n^6-1039598n^8+69361n^{10}+4471n^{12}}{16384\left(n^2-1\right)^9\left(n^2-4\right)^3\left(n^2-9\right)\left(n^2-16\right)\left(n^2-25\right)}q^{10}+\cdots\end{matrix}\right\}$$

.

*Et pour les fonctions de Mathieu angulaires paires et impaires d'ordre entier, pour un développement à l'ordre 3 en q :*

$$ce_0(z,q)\approx\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1-\frac{1}{2}qCos(2z)+\frac{1}{32}q^2(Cos(4z)-2)-\frac{1}{128}q^3\left(\frac{1}{9}Cos(6z)-Cos(2z)\right)+\cdots\right)$$

$$ce_1(z,q)\approx Cos(z)-\frac{1}{8}qCos(3z)+\frac{1}{128}q^2\left(\frac{2}{3}Cos(5z)-2Cos(3z)-Cos(z)\right)-\frac{1}{1024}q^3\left(\frac{1}{9}Cos(7z)-\frac{8}{9}Cos(5z)+2Cos(z)\right)+\cdots$$

$$se_1(z,q)\approx Sin(z)-\frac{1}{8}qSin(3z)+\frac{1}{128}q^2\left(\frac{2}{3}Sin(5z)-2Sin(3z)-Sin(z)\right)-\frac{1}{1024}q^3\left(\frac{1}{9}Sin(7z)-\frac{8}{9}Sin(5z)-2Sin(z)\right)+\cdots$$

$$ce_2(z,q)\approx Cos(2z)-\frac{1}{4}q\left(\frac{1}{3}Cos(4z)-1\right)+\frac{1}{128}q^2\left(\frac{1}{3}Cos(6z)-\frac{76}{9}Cos(2z)\right)-\frac{1}{23040}q^3(Cos(8z)-55Cos(4z)+980)+\cdots$$

$$se_2(z,q)\approx Sin(2z)-\frac{1}{12}qSin(4z)+\frac{1}{128}q^2\left(\frac{1}{3}Sin(6z)-\frac{4}{9}Sin(2z)\right)-\frac{1}{23040}q^3(Sin(8z)-15Sin(4z))+\cdots$$

$$ce_3(z,q)\approx\left\{\begin{array}{l}Cos(3z)+\frac{1}{16}q(2Cos(z)-Cos(5z))+\frac{1}{2560}q^2(40Cos(z)-25Cos(3z)+4Cos(7z))-\\-\frac{1}{368640}q^3(90Cos(z)+720Cos(3z)-99Cos(5z)+8Cos(9z))+\cdots\end{array}\right\}$$

$$se_3(z,q)\approx\left\{\begin{array}{l}Sin(3z)+\frac{1}{16}q(2Sin(z)-Sin(5z))-\frac{1}{2560}q^2(40Sin(z)+25Sin(3z)-4Sin(7z))-\\-\frac{1}{368640}q^3(90Sin(z)-720Sin(3z)-99Sin(5z)+8Sin(9z))+\cdots\end{array}\right\}$$

$$Pour\ n\geq 4\quad\left\{\begin{array}{l}ce_n(z,q)\approx Cos(nz)-\frac{1}{4}q\left(\frac{1}{n+1}Cos((n+2)z)-\frac{1}{n-1}Cos((n-2)z)\right)+\\+\frac{1}{32}q^2\left(\frac{1}{(n+1)(n+2)}Cos((n+4)z)+\frac{1}{(n-1)(n-2)}Cos((n-4)z)-\frac{2(n^2+1)}{(n^2-1)^2}Cos(nz)\right)\\+\frac{1}{128}q^3\left(\frac{Cos((n-6)z)}{3(n-1)(n-2)(n-3)}-\frac{Cos((n+6)z)}{3(n+1)(n+2)(n+3)}+\frac{(n^3+n^2-n+11)Cos((n+2)z)}{(n+1)^3(n-1)^2(n+2)}-\frac{(n^3-n^2-n-11)Cos((n-2)z)}{(n-1)^3(n+1)^2(n-2)}\right)+\cdots\\se_n(z,q)\approx Sin(nz)-\frac{1}{4}q\left(\frac{1}{n+1}Sin((n+2)z)-\frac{1}{n-1}Sin((n-2)z)\right)+\\+\frac{1}{32}q^2\left(\frac{1}{(n+1)(n+2)}Sin((n+4)z)+\frac{1}{(n-1)(n-2)}Sin((n-4)z)-\frac{2(n^2+1)}{(n^2-1)^2}Sin(nz)\right)\\+\frac{1}{128}q^3\left(\frac{Sin((n-6)z)}{3(n-1)(n-2)(n-3)}-\frac{Sin((n+6)z)}{3(n+1)(n+2)(n+3)}+\frac{(n^3+n^2-n+11)Sin((n+2)z)}{(n+1)^3(n-1)^2(n+2)}-\frac{(n^3-n^2-n-11)Sin((n-2)z)}{(n-1)^3(n+1)^2(n-2)}\right)+\cdots\end{array}\right\}$$

*Pour un développement à l'ordre 4 en q, on devrait donner les expressions spécifiques jusqu'à ce4(z,q) et se4(z,q) et les expressions sont générales uniquement dans le cas n>=5.*

***Développement limité des solutions angulaires d'ordre entier de l'équation de Mathieu dans le cas d'un paramètre q très grand : développement de Sips et de Goldstein***

*Robert Sips a publié dans deux articles datés de 1949 et 1959 des série asymptotiques des fonctions de Mathieu d'ordre entier : « REPRÉSENTATION ASYMPTOTIQUE DES FONCTIONS DE MATHIEU ET DES FONCTIONS D'ONDE SPHÉROIDALES » mettant en jeu les fonctions paraboliques cylindriques d'ordre entier. Ces séries approximent remarquablement bien les fonctions de Mathieu paires et impaires autour de la valeur x=π/2 lorsque q est grand :*

$$ce_n(x,q)=\hat{C}_n\left(U_n(\xi)+V_n(\xi)\right) \qquad se_{n+1}(z,q)=Sin(x)\hat{S}_n\left(U_n(\xi)-V_n(\xi)\right) \qquad \xi=2q^{\frac{1}{4}}Cos(x) \quad h=q^{\frac{1}{2}}$$

$$C_n^m=\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} \quad Coefficient\ binomial=\frac{m!}{n!(n-m)!}$$

$$U_n(\xi)\approx D_n(\xi)-\frac{1}{2^6 h}\left(D_{n+4}(\xi)-4!C_4^n D_{n-4}(\xi)\right)+\frac{1}{2^{13}h^2}\left(D_{n+8}(\xi)-2^5(n+2)D_{n+4}(\xi)+4!2^5(n-1)C_4^n D_{n-4}(\xi)+8!C_8^n D_{n-8}(\xi)\right)$$

$$V_n(\xi)\approx -\frac{1}{2^4 h}\left(D_{n+2}(\xi)+n(n-1)D_{n-2}(\xi)\right)+\frac{1}{2^{10}h^2}\left(D_{n+6}(\xi)+\left(n^2-25n-36\right)D_{n+2}(\xi)-n(n-1)\left(n^2+27n-10\right)D_{n-2}(\xi)+6!C_6^n D_{n-6}(\xi)\right)$$

$$\hat{C}_n=\left(\frac{\pi h}{2(n!)^2}\right)^{\frac{1}{4}}\left(1+\frac{2n+1}{8h}+\frac{n^4+2n^3+263n^2+262n+108}{2048h^2}+\cdots\right)^{-\frac{1}{2}} \qquad \hat{S}_n=\left(\frac{\pi h}{2(n!)^2}\right)^{\frac{1}{4}}\left(1-\frac{2n+1}{8h}+\frac{n^4+2n^3-121n^2-122n-84}{2048h^2}+\cdots\right)^{-\frac{1}{2}}$$

.

*Quant aux développements de Goldstein établis dans les années 1927-29, ils sont valables autour de la valeur 0 de l'argument, ils utilisent des fonctions élémentaires sinusoïdales :*

$$\begin{cases} ce_n(x,q)=ce_n(0,q)\dfrac{2^{n-\frac{1}{2}}}{\sigma_n}\left(W_n^+(x)\left(P_n(x)-Q_n(x)\right)+W_n^-(x)\left(P_n(x)+Q_n(x)\right)\right) \\ se_{n+1}(x,q)=se_{n+1}'(0,q)\dfrac{2^{n-\frac{1}{2}}}{\tau_{n+1}}\left(W_n^+(x)\left(P_n(x)-Q_n(x)\right)-W_n^-(x)\left(P_n(x)+Q_n(x)\right)\right) \end{cases} \qquad \xi=2q^{\frac{1}{4}}Cos(x) \quad h=q^{\frac{1}{2}}$$

$$W_n^+(x)=\frac{e^{2hSin(x)}}{(Cos(x))^{n+1}}\left(Cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right)^{2n+1} \qquad W_n^-(x)=\frac{e^{-2hSin(x)}}{(Cos(x))^{n+1}}\left(Sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right)^{2n+1}$$

$$\sigma_n\approx 1+\frac{s}{8h}+\frac{4s^2+3}{2^7h^2}+\frac{19s^3+59s}{2^{11}h^3}+\cdots \qquad \tau_{n+1}\approx 2h-\frac{s}{4}-\frac{2s^2+3}{2^6h}-\frac{7s^3+47s}{2^{10}h^2}+\cdots$$

$$P_n(x)\approx 1+\frac{s}{8h(Cos(x))^2}+\frac{1}{h^2}\left(\frac{s^4+86s^2+105}{2^{11}(Cos(x))^4}-\frac{s^4+22s^2+57}{2^{11}(Cos(x))^2}\right)+\cdots$$

$$Q_n(x)\approx\frac{Sin(x)}{(Cos(x))^2}\left(\frac{s^2+3}{2^5h}+\frac{1}{2^9h^2}\left(s^3+3s+\frac{4s^3+44s}{(Cos(x))^2}\right)\right)+\cdots$$

*Ces développements sont remarquables par leur simplicité de mise en œuvre. Typiquement le développement de Sips donne une très bonne approximation sur l'intervalle [π/4,3π/4], tandis que celui de Goldstein est valable sur l'intervalle [-π/4,π/4] . En combinant les deux développements et tirant partie des propriétés de périodicité 2π, et de périodicité ou d'anti-périodicité π pour les fonctions paires et impaires de Mathieu d'ordre entier, les deux approximations couvrent tout l'intervalle [0, 2π]. Depuis cet époque, les travaux réalisés dans ce sens n'ont jamais réellement fait mieux quant à une mise en œuvre pratique des représentations asymptotiques des fonctions de Mathieu.*

***Développement limité des solutions radiales Je et Jo d'ordre entier de l'équation de Mathieu dans le cas d'un paramètre q très grand : développement de Goldstein***

*Tous les développements asymptotiques de Goldstein pour les fonctions radiales sont valables pour toutes les valeurs de l'argument z >0, contrairement aux fonctions angulaires. Cette remarque est importante car cela permet de calculer des expressions asymptotiques simples pour des valeurs propres de problèmes aux limites en coordonnées elliptiques.*

*Prise au seul premier terme des puissances de q, des fonctions de Mathieu radiales d'ordre entier (voir A.Erdelyi H.Bateman HIGHER TRANSCENDENTAL FUNCTIONS_VOL_III, formule 7 section 16.7 page 127), ainsi que MachLaclan Theory and Application of Mathieu Functions, additionnal results 6, page 385, formules (1,2) pour les fonctions Je et Ne, les développements sont les suivants :*

$$\begin{cases} Je_n(x,q) \approx \dfrac{ce_n(0,q)}{\sqrt{Cosh(x)}} Cos\left(2\sqrt{q}Sinh(x) - (2n+1)ArcTan\left(Tanh\left(\dfrac{x}{2}\right)\right)\right) \\ Jo_n(x,q) \approx \dfrac{se_n'(0,q)}{2\sqrt{q}\sqrt{Cosh(x)}} Sin\left(2\sqrt{q}Sinh(x) - (2n-1)ArcTan\left(Tanh\left(\dfrac{x}{2}\right)\right)\right) \quad n \geq 1 \\ Ne_n(x,q) \approx \dfrac{ce_n(0,q)}{\sqrt{Cosh(x)}} Sin\left(2\sqrt{q}Sinh(x) - (2n+1)ArcTan\left(Tanh\left(\dfrac{x}{2}\right)\right)\right) \\ No_n(x,q) \approx -\dfrac{se_n'(0,q)}{2\sqrt{q}\sqrt{Cosh(x)}} Cos\left(2\sqrt{q}Sinh(x) - (2n-1)ArcTan\left(Tanh\left(\dfrac{x}{2}\right)\right)\right) \quad n \geq 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Je_n'(x,q) \approx -2\sqrt{q}\sqrt{Cosh(x)}ce_n(0,q)Sin\left(2\sqrt{q}Sinh(x) - (2n+1)ArcTan\left(Tanh\left(\dfrac{x}{2}\right)\right)\right) \\ Jo_n'(x,q) \approx \sqrt{Cosh(x)}se_n'(0,q)Cos\left(2\sqrt{q}Sinh(x) - (2n-1)ArcTan\left(Tanh\left(\dfrac{x}{2}\right)\right)\right) \quad n \geq 1 \\ Ne_n'(x,q) \approx 2\sqrt{q}\sqrt{Cosh(x)}ce_n(0,q)Cos\left(2\sqrt{q}Sinh(x) - (2n+1)ArcTan\left(Tanh\left(\dfrac{x}{2}\right)\right)\right) \\ No_n'(x,q) \approx \sqrt{Cosh(x)}se_n'(0,q)Sin\left(2\sqrt{q}Sinh(x) - (2n-1)ArcTan\left(Tanh\left(\dfrac{x}{2}\right)\right)\right) \quad n \geq 1 \end{cases}$$

$$De\ plus \quad ArcTan\left(Tanh\left(\frac{x}{2}\right)\right) = \frac{1}{2} ArcTan(Sinh(x))$$

*Les développements aux termes supérieurs de q sont les suivants, il s'inspirent des développements de GoldStein pour les fonctions angulaires et l'on peut les trouver sur le site de NIST « Handbook of Mathematical Functions, Mathieu Functions, formules 28.26.1, 28.26.2 , 28.26.4 et 28.26.5:*

$$\left.\begin{array}{l} W_c(x)=Cos\left(2\sqrt{q}Sinh(x)-(2n+1)ArcTan\left(Tanh\left(\frac{x}{2}\right)\right)\right) \\ W_s(x)=Sin\left(2\sqrt{q}Sinh(x)-(2n+1)ArcTan\left(Tanh\left(\frac{x}{2}\right)\right)\right) \end{array}\right\} \quad \left\{\begin{array}{l} Je_n(x,q)=\dfrac{ce_n(0,q)}{(Cos(x))^{\frac{1}{2}}}\left(W_c(x)P_n(x)+W_s(x)Q_n(x)\right) \\ Jo_{n+1}(x,q)=\dfrac{se_{n+1}'(0,q)}{2\sqrt{q}(Cos(x))^{\frac{1}{2}}}\left(W_s(x)P_n(x)-W_c(x)Q_n(x)\right) \\ Ne_n(x,q)=\dfrac{ce_n(0,q)}{(Cos(x))^{\frac{1}{2}}}\left(W_s(x)P_n(x)-W_c(x)Q_n(x)\right) \\ No_{n+1}(x,q)=-\dfrac{se_{n+1}'(0,q)}{2\sqrt{q}(Cos(x))^{\frac{1}{2}}}\left(W_c(x)P_n(x)+W_s(x)Q_n(x)\right) \end{array}\right.$$

$$h=q^{\frac{1}{2}} \quad \left\{\begin{array}{l} P_n(x)\approx\left\{\begin{array}{l} 1+\dfrac{s}{8h(Cosh(x))^2}+\dfrac{1}{2^{11}h^2}\left(\dfrac{s^4+86s^2+105}{(Cosh(x))^4}-\dfrac{s^4+22s^2+57}{(Cosh(x))^2}\right)- \\ -\dfrac{1}{2^{14}h^3}\left(\dfrac{s^5+14s^3+33s}{(Cosh(x))^2}+\dfrac{2s^5+124s^3+1122s}{(Cosh(x))^4}-\dfrac{3s^5+290s^3+1627s}{(Cosh(x))^6}\right)+\cdots \end{array}\right\} \\ Q_n(x)\approx\left\{\begin{array}{l} \dfrac{Sinh(x)}{(Cosh(x))^2}\left(\dfrac{s^2+3}{2^5h}+\dfrac{1}{2^9h^2}\left(s^3+3s+\dfrac{4s^3+44s}{(Cosh(x))^2}\right)\right)+ \\ +\dfrac{1}{2^{14}h^3}\left(5s^4+34s^2+9+\dfrac{s^6-47s^4+667s^2+2835}{12(Cosh(x))^2}+\dfrac{s^6+505s^4+12139s^2+10395}{12(Cosh(x))^4}\right)+\cdots \end{array}\right\} \end{array}\right.$$

***<u>Développement limité des solutions angulaires d'ordre entier de l'équation de Mathieu dans le cas d'un ordre entier n très grand par rapport à q, q étant défini positif</u>***

*Les deux auteurs de l'un des ouvrages de référence « Mathieusche Funktionen und Sphaeroid funktionen » sur les fonctions de Mathieu, J.Meixner et F.W.Shafke donnent une formule simple de développement asymptotique des fonctions de Mathieu paires et impaires lorsque n est grand, grand également par rapport à q (point 2.26 page 125) :*

$$h=\sqrt{|q|} \quad ce_n\left(x,h^2\right)\pm ise_n\left(x,h^2\right)\approx e^{\pm inx}\left(1\mp\frac{ih^2}{n}Sin(2x)+\frac{1}{n^2}\left\{\frac{h^4}{16}(Cos(4x)-1)+\frac{h^2}{2}Cos(2x)\right\}\right)+O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} ce_n\left(x,h^2\right)\approx Cos(nx)+\dfrac{2h^2}{n}Sin(2x)Sin(nx)+\dfrac{Cos(nx)}{n^2}\left\{\dfrac{h^4}{16}(Cos(4x)-1)+\dfrac{h^2}{2}Cos(2x)\right\} \\ se_n\left(x,h^2\right)\approx Sin(nx)-\dfrac{2h^2}{n}Sin(2x)Cos(nx)+\dfrac{Sin(nx)}{n^2}\left\{\dfrac{h^4}{16}(Cos(4x)-1)+\dfrac{h^2}{2}Cos(2x)\right\} \end{array}\right.$$

*Cette expression approchée n'étant pas normée comme à l'habitude, il convient de revenir à la normalisation classique, ce qui donne :*

$$\int_0^{2\pi} dx\left\{ce_n\left(x,h^2\right)\right\}^2 \approx \int_0^{2\pi} dx\left\{se_n\left(x,h^2\right)\right\}^2 \approx \pi\left(1+\frac{h^4}{8n^4}+\frac{3h^8}{512n^4}\right) \qquad h=\sqrt{|q|}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ce_n\left(x,h^2\right) \approx \dfrac{1}{\sqrt{\left(1+\dfrac{h^4}{8n^4}+\dfrac{3h^8}{512n^4}\right)}}\left[Cos(nx)+\dfrac{2h^2}{n}Sin(2x)Sin(nx)+\dfrac{Cos(nx)}{n^2}\left\{\dfrac{h^4}{16}(Cos(4x)-1)+\dfrac{h^2}{2}Cos(2x)\right\}\right] \\ se_n\left(x,h^2\right) \approx \dfrac{1}{\sqrt{\left(1+\dfrac{h^4}{8n^4}+\dfrac{3h^8}{512n^4}\right)}}\left[Sin(nx)-\dfrac{2h^2}{n}Sin(2x)Cos(nx)+\dfrac{Sin(nx)}{n^2}\left\{\dfrac{h^4}{16}(Cos(4x)-1)+\dfrac{h^2}{2}Cos(2x)\right\}\right] \end{cases}$$

*Les nombres caractéristiques a et b ont également une expression asymptotique particulièrement simple :* $\left.\begin{matrix} a_n\left(h^2\right) \\ b_n\left(h^2\right)\end{matrix}\right\} \approx n^2+\frac{h^4}{2\left(n^2-1\right)}+O\left(n^{-6}\right)$.

*Les expressions pour les fonctions radiale Je et Jo s'en déduisent par les formules de connexion avec les fonctions angulaires :*

$$Je_n\left(x,h^2\right)=ce_n\left(ix,h^2\right) \qquad Jo_n\left(x,h^2\right)=-i\ se_n\left(ix,h^2\right) \qquad Cos(iz)=Cosh(z) \qquad Sin(iz)=iSinh(z)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Je_n\left(x,h^2\right) \approx \dfrac{1}{\sqrt{\left(1+\dfrac{h^4}{8n^4}+\dfrac{3h^8}{512n^4}\right)}}\left[Cosh(nx)-\dfrac{2h^2}{n}Sinh(2x)Sinh(nx)+\dfrac{Cosh(nx)}{n^2}\left\{\dfrac{h^4}{16}(Cosh(4x)-1)+\dfrac{h^2}{2}Cosh(2x)\right\}\right] \\ Jo_n\left(x,h^2\right) \approx \dfrac{1}{\sqrt{\left(1+\dfrac{h^4}{8n^4}+\dfrac{3h^8}{512n^4}\right)}}\left[Sinh(nx)-\dfrac{2h^2}{n}Sinh(2x)Cosh(nx)+\dfrac{Sinh(nx)}{n^2}\left\{\dfrac{h^4}{16}(Cosh(4x)-1)+\dfrac{h^2}{2}Cosh(2x)\right\}\right] \end{cases}$$

**_Formulaires des fonctions de Mathieu (angulaires) et fonctions modifiées de Mathieu (radiales) de première et deuxième espèces d'ordre non entier_**

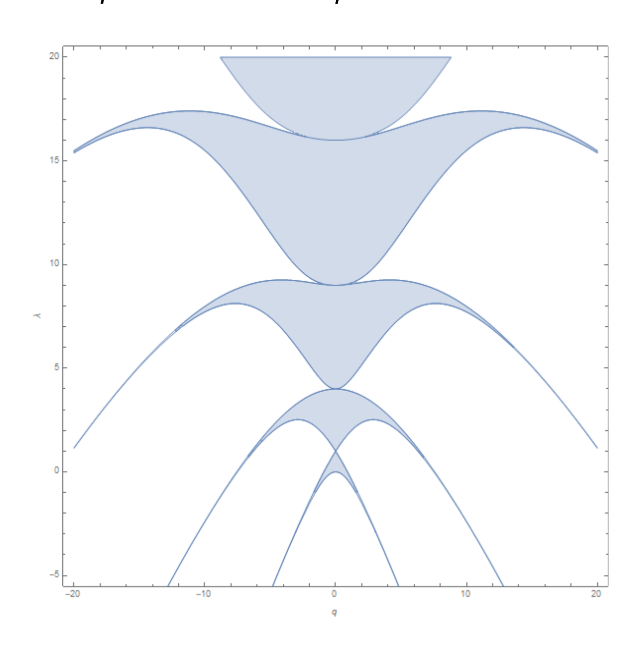
## **_Solution angulaire non périodique de l'équation de Mathieu_**

*Les solutions de l'équation de Mathieu* $f''(z)+(\lambda-2q\,Cos(2z))f(z)=0$ *dîtes de Floquet possède la propriété suivante :* $f(z+\pi)=e^{i\pi\nu}f(z)$. *On peut alors développer la solution sous la forme :* $f(z)=e^{i\nu z}p(z)$ *où la fonction p(z) est une fonction périodique de période π . Le coefficient ν est appelé l'exposant de Floquet de la fonction de Mathieu. Dans les solutions périodiques 2π exposée jusqu'à présent l'exposant est un entier, et dans ce cas l'expression exponentielle est soit +1 soit -1. Mais il se peut que l'exposant soit un réel, voir un nombre complexe. La fonction p(z) se développe en série de Fourier de la forme :* $p(z)=\sum_{l=-\infty}^{l=+\infty}c_l e^{2ilz}\Rightarrow f(z)=e^{i\nu z}\sum_{l=-\infty}^{l=+\infty}c_l e^{2ilz}$ .

*A tout exposant de Floquet translaté d'un nombre entier pair positif ou négatif quelconque* $\nu\pm 2n$ *correspond une même solution de l'équation de Mathieu. Autrement dit pour la détermination de l'exposant de Floquet on peut toujours ramener sa partie réelle (si l'exposant est complexe) à l'intervalle [-1,+1]. Dans le cas où l'exposant de Floquet n'est pas un entier alors la seconde solution de l'équation de Mathieu se calcule très simplement en prenant l'iverse négatif de l'arguement comme suit :* $f_I(z)=e^{i\nu z}\sum_{l=-\infty}^{l=+\infty}c_l e^{2ilz}\Rightarrow f_{II}(z)=f_I(-z)=e^{-i\nu z}\sum_{l=-\infty}^{l=+\infty}c_l e^{-2ilz}$ .

*La construction de la seconde solution indépendante implique qu'à l'exposant de Floquet -ν correspond également une solution de la même équation de Mathieu. Et dans ce cas on peut dire que tout les exposants caractéristiques* $\pm\nu\pm 2n$ *définissent une solution de l'équation de Mathieu. Il suffit donc de ramener la partie réelle de l'exposant de Floquet [0,1] pour caractériser une solution de l'équation de Mathieu et en déduire les autres soit par translation, soit par changement de signe de l'exposant.*

*Les solutions sont dîtes stables lorsque l'exposant est purement réel, soit lorsque les solutions ne présentent pas de divergence lorsque l'argument z est infini. On peut dresser une carte des zones de stabilité en fonction des deux paramètres de l'équation de Mathieu λ et q :*



*Sur cette carte les zones en bleu correspondent à des zones de stabilité pour lesquelles donc l'exposant est réel. Toutes les zones en bleu sont ouvertes dans le sens où elles sont bornées supérieurement et inférieurement par les courbes des caractéristiques des solutions périodiques paires et impaires, soit celles où l'exposant devient un entier naturel :*

$$\nu = n \in N \Rightarrow \begin{cases} \lambda(q) = a_n(q) & \textit{pour une solution paire périodique} \\ \lambda(q) = b_n(q) & \textit{pour une solution impaire périodique} \end{cases}.$$

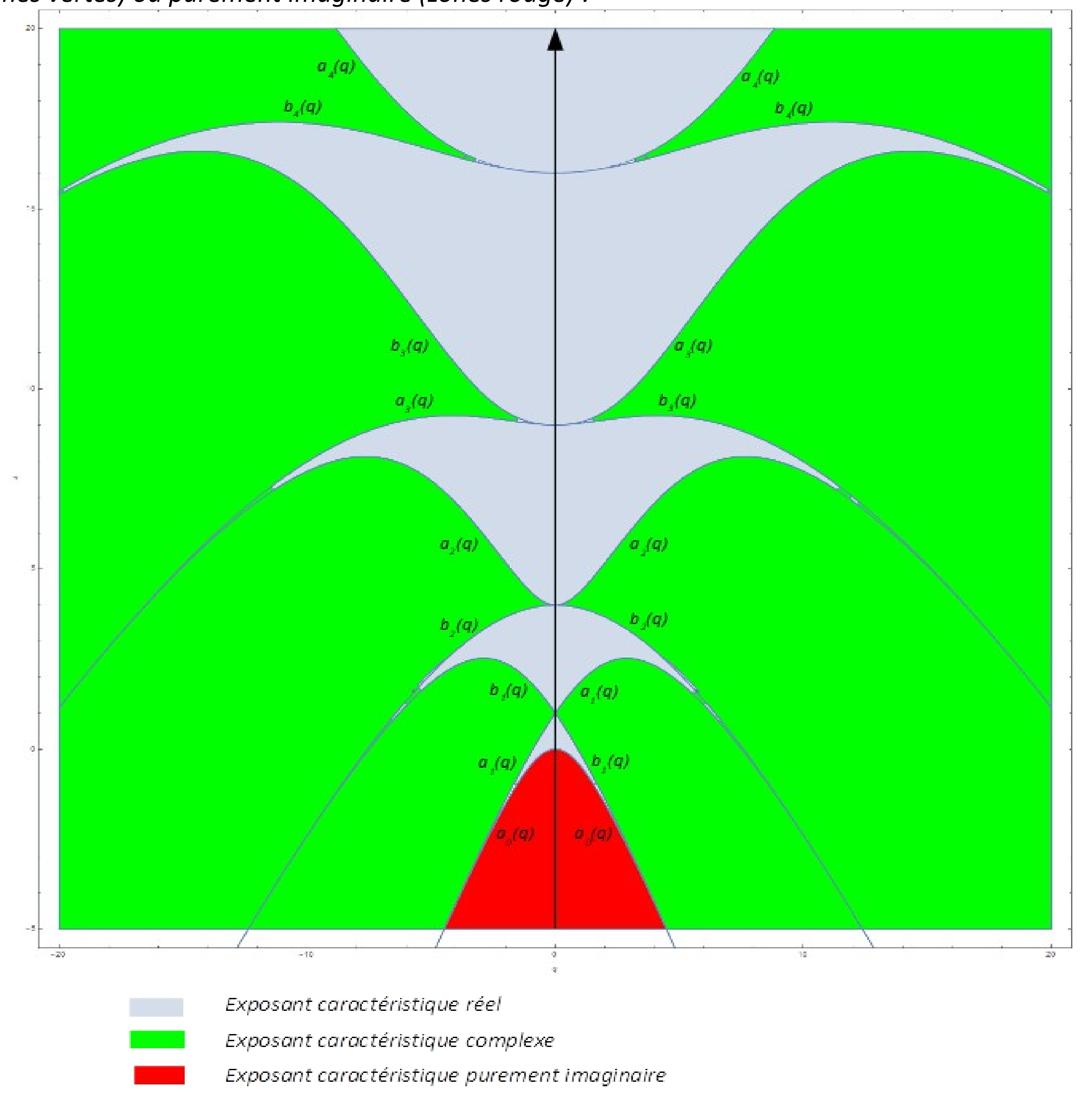
*Dans la zone q>0 et q<0, les courbes de caractéristique se succèdent selon l'ordre suivant :*

$$\begin{array}{l} q > 0 \rightarrow a_0(q) < b_1(q) < a_1(q) < b_2(q) < a_2(q) < b_3(q) < \cdots \\ q < 0 \rightarrow a_0(q) < a_1(q) < b_1(q) < b_2(q) < a_2(q) < a_3(q) < b_3(q) < b_4(q) < \cdots \end{array}.$$

*Les zones de stabilité en fonction de q sont telles que :*

$$\begin{array}{l} q > 0 \rightarrow \lambda(q) \in [a_0(q), b_1(q)] \cup [a_1(q), b_2(q)] \cup [a_2(q), b_3(q)] \cup \cdots \\ q < 0 \rightarrow \lambda(q) \in [a_0(q), a_1(q)] \cup [b_1(q), b_2(q)] \cup [a_2(q), a_3(q)] \cup [b_3(q), a_4(q)] \cup \cdots \end{array}.$$

*Une carte plus complète permet de préciser les zones où l'exposant est réel (zones bleu), complexe (zones vertes) ou purement imaginaire (zones rouge) :*



***<u>Une méthode de calcul de l'exposant de Floquet non entier</u>***

*En injectant la forme cherchée de la solution dans l'équation de Mathieu :* $f''(z)+(\lambda-2q\,Cos(2z))f(z)=0$*, on obtient un système infini d'équations linéaires pour les coefficients de Fourier :* $((2l+\nu)^2-\lambda)c_l-q(c_{l-1}+c_{l+1})=0$*. Ce système peut s'écrire sous forme matricielle comme suit :*

$$\begin{bmatrix} \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & (\nu-4)^2 & q & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & q & (\nu-2)^2 & q & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & q & \nu^2 & q & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & 0 & q & (\nu+2)^2 & q & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & 0 & q & (\nu+4)^2 & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & q & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdots \\ c_{-2} \\ c_{-1} \\ c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \cdots \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \cdots \\ c_{-2} \\ c_{-1} \\ c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \cdots \end{bmatrix} \Leftrightarrow (\mathbf{H}_\nu - \lambda\mathbf{I}).\mathbf{C} = \mathbf{0}$$

*C'est donc également un problème aux valeurs propres.*

*Une solution non triviale est obtenue lorsque le déterminant* $Det(\mathbf{H}_\nu-\lambda\mathbf{I})=0$ *s'annule, ce qui en théorie conduit à une équation transcendantale en l'exposant ν. On peut montrer que la solution de l'équation transcendantale est donné par l'expression suivante :*

$$\begin{cases} \nu = \dfrac{2}{\pi} ArcSin\left(\sqrt{\Delta(0)Sin^2\left(\dfrac{\pi}{2}\sqrt{\lambda}\right)}\right) & si \quad \lambda \neq 2l \\ \nu = \dfrac{1}{\pi} ArcCos(2\Delta(1)-1) & si \quad \lambda = 2l \end{cases}$$

*où l'on doit calculer le déterminant suivant :*

$$\Delta(\nu) = Det \begin{bmatrix} \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & 1 & \dfrac{q}{(\nu-4)^2-\lambda} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \dfrac{q}{(\nu-2)^2-\lambda} & 1 & \dfrac{q}{(\nu-2)^2-\lambda} & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \dfrac{q}{\nu^2-\lambda} & 1 & \dfrac{q}{\nu^2-\lambda} & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & 0 & \dfrac{q}{(\nu+2)^2-\lambda} & 1 & \dfrac{q}{(\nu+2)^2-\lambda} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \dfrac{q}{(\nu+4)^2-\lambda} & 1 & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

*D'où :*

$$\Delta(0) = Det \begin{bmatrix} \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & 1 & \dfrac{q}{(4)^2-\lambda} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \dfrac{q}{(2)^2-\lambda} & 1 & \dfrac{q}{(2)^2-\lambda} & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & -\dfrac{q}{\lambda} & 1 & -\dfrac{q}{\lambda} & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & 0 & \dfrac{q}{(2)^2-\lambda} & 1 & \dfrac{q}{(2)^2-\lambda} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \dfrac{q}{(4)^2-\lambda} & 1 & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots \end{bmatrix} \Delta(1) = Det \begin{bmatrix} \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & 1 & \dfrac{q}{(3)^2-\lambda} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \dfrac{q}{1-\lambda} & 1 & \dfrac{q}{1-\lambda} & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \dfrac{q}{1-\lambda} & 1 & \dfrac{q}{1-\lambda} & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & 0 & \dfrac{q}{(3)^2-\lambda} & 1 & \dfrac{q}{3^2-\lambda} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \dfrac{q}{(5)^2-\lambda} & 1 & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

*Cette méthode s'entend si l'on connaît par avance le paramètre λ de l'équation de Mathieu. On peut avoir le cas contraire où l'exposant de Floquet est connu et l'on cherche à déterminer les coefficient de Fourier de la solution. D'autre part une valeur approchée de l'exposant de Floquet est obtenue en limitant la taille du système matriciel.*

***<u>Méthode de calcul des coefficients des fonctions de Mathieu angulaires d'ordre non-entier</u>***

*Une des méthodes utilisées pour calculer les coefficients de Fourier des fonctions de Mathieu angulaire consiste à diagonaliser la matrice symétrique* $\mathbf{H}_\nu - \lambda\mathbf{I}$ *en la fixant de taille (2N+1)x(2N+1) :*

$$\mathbf{H}_\nu - \lambda\mathbf{I} = \begin{bmatrix} \ldots & \ldots & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ \ldots & (\nu-4)^2-\lambda & q & 0 & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & q & (\nu-2)^2-\lambda & q & 0 & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & q & \nu^2-\lambda & q & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & 0 & q & (\nu+2)^2-\lambda & q & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & 0 & q & (\nu+4)^2-\lambda & \ldots \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & q & \ldots \end{bmatrix}$$

*où N est l'approximation choisi pour le nombre de termes du développement de Fourier. Les coefficients de Fourier sont alors (à une constante globale près) <u>les coordonnées du vecteur propre de la matrice $\mathbf{H}_\nu - \lambda\mathbf{I}$ de valeur propre nulle, soit toujours la plus petite valeur propre admissible</u>. D'autre part la diagonalisation de la matrice $\mathbf{H}_\nu$ lorsque l'on connaît l'exposant de Floquet donne comme valeur propre minimale le paramètre λ.*

*Cela implique évidemment que l'on connaisse a priori l'exposant de Floquet de l'équation de Mathieu, et l'on se reporte au point précédent pour sa détermination à partir du paramètre λ. Typiquement dans un problème aux limites en coordonnées elliptiques cylindriques, les conditions aux limites permettent de déterminer des valeurs d'exposant de Floquet, d'où la connaissance du paramètre λ et de la construction des coefficients de Fourier de la solution.*

*On note la solution angulaire construite, la fonction me, comme suit :* $me_\nu(z,q) = \sum_{l=-\infty}^{l=+\infty} c_{2l}^{\nu}(q) e^{i(\nu+2l)z}$ *.*

*Cette fonction est a priori à valeur complexe. La normalisation communément choisit pour les fonctions me angulaire est telle que l'intégrale suivante sur [0,π] soit égale à π :*

$$\int_0^\pi dx\, me_\nu(x,q) me_\nu(-x,q) = \pi \Rightarrow \sum_{l=-\infty}^{l=+\infty} \left(c_{2l}^{\nu}(q)\right)^2 = 1$$

*Par construction on peut alors déduire les fonctions paires et impaires ce et se, comme suit :*

$$\begin{aligned} ce_\nu(z,q) &= \sum_{l=-\infty}^{l=+\infty} c_l^{\nu}(q) Cos((\nu+2l)z) = \frac{me_\nu(z,q)+me_\nu(-z,q)}{2} \\ se_\nu(z,q) &= \sum_{l=-\infty}^{l=+\infty} c_l^{\nu}(q) Sin((\nu+2l)z) = \frac{me_\nu(z,q)-me_\nu(-z,q)}{2i} \\ me_\nu(z,q) &= ce_\nu(z,q) + i\, se_\nu(z,q) \end{aligned}$$

*Les fonctions de Mathieu d'ordre non-entier sont en général des fonctions à valeur complexe :*

$$
\begin{aligned}
& me_\nu(z,q) = ce_\nu(z,q) + i\, se_\nu(z,q) \in \mathbf{C} \\
& Pour\ \nu, z \in \mathbf{R} \quad \Rightarrow ce_\nu(z,q) \in \mathbf{R} \quad se_\nu(z,q) \in \mathbf{R} \\
& \Rightarrow ce_\nu(z,q) = \frac{me_\nu(z,q) + me_\nu(-z,q)}{2} = \mathrm{Re}(me_\nu(z,q)) \\
& se_\nu(z,q) = \frac{me_\nu(z,q) - me_\nu(-z,q)}{2i} = \mathrm{Im}(me_\nu(z,q))
\end{aligned}
$$

*Mais pour des exposants caractéristiques complexes quelconques, notamment dans les fameuses zones d'instabilité, alors les fonctions me, ce et se sont toutes trois à valeur complexe. La fonction possède la propriété miroir suivante quelque soient les valeurs de q, z et v :*

$$
\overline{me_{\bar{\nu}}(\bar{z},\bar{q})} = me_\nu(-z,q) \qquad \begin{cases} ce_\nu(z,q) = \dfrac{me_\nu(z,q) + me_\nu(-z,q)}{2} \\ se_\nu(z,q) = \dfrac{me_\nu(z,q) - me_\nu(-z,q)}{2i} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overline{ce_{\bar{\nu}}(\bar{z},\bar{q})} = ce_\nu(-z,q) \\ \overline{se_{\bar{\nu}}(\bar{z},\bar{q})} = se_\nu(-z,q) \end{cases}
$$

*Lorsque les paramètres q et l'argument z sont réels, cette propriété s'écrit :*

$$
\overline{me_{\bar{\nu}}(z,q)} = me_\nu(-z,q) \qquad \begin{cases} \overline{ce_{\bar{\nu}}(z,q)} = ce_\nu(-z,q) \\ \overline{se_{\bar{\nu}}(z,q)} = se_\nu(-z,q) \end{cases}.
$$

*La propriété miroir du nombre caractéristique λ, donné par les deux auteurs J.Meixner, F.W.Schafke dans leur ouvrage « Mathieusche_Funktionen_und_Sphaeroid_funktionen » :*

$$
\overline{\lambda_{\bar{\nu}}(\bar{q})} = \lambda_\nu(q)
$$

*Lorsque l'exposant de Floquet change de signe la fonction de Mathieu me est équivalente à la fonctions de Mathieu d'argument négatif :*

$$
\begin{cases}
me_{-\nu}(z,q) = me_\nu(-z,q) \\
ce_{-\nu}(z,q) = \dfrac{me_{-\nu}(z,q) + me_{-\nu}(-z,q)}{2} = ce_\nu(-z,q) = ce_\nu(z,q) \\
se_{-\nu}(z,q) = \dfrac{me_{-\nu}(z,q) - me_{-\nu}(-z,q)}{2i} = \dfrac{me_\nu(-z,q) - me_\nu(z,q)}{2i} = se_\nu(-z,q) = -se_\nu(z,q)
\end{cases}
$$

*Les changements de signe de q et de l'exposant entraîne également les relations sur les coefficients de Fourier :* $c_{-2l}^{-\nu}(q) = c_{2l}^{\nu}(q) \quad et \quad c_{2l}^{\nu}(-q) = (-1)^l c_{2l}^{\nu}(q)$

*Dans le cas où l'exposant de Floquet est purement imaginaire, z, q étant réels alors la fonction me est à valeur réelle, tout comme la fonction ce et la fonction se est purement imaginaire :*

$$\nu = i\tau \qquad \begin{cases} \overline{me_{i\tau}(z,q)} = me_{-i\tau}(-z,q) = me_{i\tau}(z,q) \Rightarrow me_{i\tau}(z,q) \in \mathbf{R} \\ \overline{ce_{i\tau}(z,q)} = ce_{-i\tau}(-z,q) = ce_{i\tau}(z,q) \Rightarrow ce_{i\tau}(z,q) \in \mathbf{R} \\ \overline{se_{i\tau}(z,q)} = se_{-i\tau}(-z,q) = -se_{i\tau}(z,q) \Rightarrow se_{i\tau}(z,q) \in i\mathbf{R} \end{cases}$$

*On établit la propriété de réalité de la combinaison linéaire suivante :*

$$y(\theta,q) = \frac{me_\nu(\theta,q)me_\nu(-\theta_0,q) - me_\nu(\theta_0,q)me_\nu(-\theta,q)}{2i} \in \mathbf{R}$$

$$En\ effet\ y(\theta,q) = \frac{(ce_\nu(\theta,q)+ise_\nu(\theta,q))(ce_\nu(\theta_0,q)-ise_\nu(\theta_0,q)) - (ce_\nu(\theta_0,q)+ise_\nu(\theta_0,q))(ce_\nu(\theta,q)-ise_\nu(\theta,q))}{2i}$$

$$\Rightarrow y(\theta,q) = se_\nu(\theta,q)ce_\nu(\theta_0,q) - se_\nu(\theta_0,q)ce_\nu(\theta,q)$$

*Formules de connexion par le changement de signe de q*

*Lorsque le signe de q change, les fonctions me, ce et se peuvent se calculer comme suit :*

$$\begin{cases} me_\nu(z,-q) = e^{\frac{i\nu\pi}{2}} me_\nu\left(z-\frac{\pi}{2},q\right) \qquad me_\nu(-z,-q) = e^{\frac{i\nu\pi}{2}} me_\nu\left(-z-\frac{\pi}{2},q\right) \\ ce_\nu(z,-q) = e^{\frac{i\nu\pi}{2}} \dfrac{me_\nu\left(z-\frac{\pi}{2},q\right) + me_\nu\left(-z-\frac{\pi}{2},q\right)}{2} \\ se_\nu(z,-q) = e^{\frac{i\nu\pi}{2}} \dfrac{me_\nu\left(z-\frac{\pi}{2},q\right) - me_\nu\left(-z-\frac{\pi}{2},q\right)}{2i} \end{cases}$$

***Démonstration de la formule « miroir » pour les fonctions de Mathieu Angulaires d'ordre quelconque***

*L'application de la formule miroir implique la relation suivante sur les coefficients de Fourier du développement de la fonction angulaire de Mathieu :*

$$\begin{cases} \overline{me_{\bar\nu}(\bar z,\bar q)} = me_\nu(-z,q) \\ me_\nu(z,q) = \sum_{l=-\infty}^{l=+\infty} c_{2l}^{\nu}(q) e^{i(\nu+2l)z} \end{cases} \Rightarrow \overline{me_{\bar\nu}(\bar z,\bar q)} = \sum_{l=-\infty}^{l=+\infty} \overline{c_{2l}^{\bar\nu}(\bar q)} e^{-i(\nu+2l)z} = \sum_{l=-\infty}^{l=+\infty} \overline{c_{2l}^{\bar\nu}(\bar q)} e^{i(\nu+2l)(-z)}$$

$$\text{Il suffit donc de montrer que} \quad \overline{c_{2l}^{\bar\nu}(\bar q)} = c_{2l}^{\nu}(q)$$

*Il suffit alors de revenir à la détermination par récurrence des coefficients :*

$$R(\lambda,q,\nu) = q c_{2l+2}^{\nu}(q) - \left(\lambda - (\nu+2l)^2\right) c_{2l}^{\nu}(q) + q c_{2l-2}^{\nu}(q) = 0$$

$$\left.\begin{matrix} q \to \bar q \quad \nu \to \bar\nu \\ \lambda \in \mathbf{R} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \overline{R(\lambda,\bar q,\bar\nu)} = q\overline{c_{2l+2}^{\bar\nu}(q)} - \left(\lambda - (\nu+2l)^2\right)\overline{c_{2l}^{\bar\nu}(q)} + q\overline{c_{2l-2}^{\bar\nu}(q)} = 0$$

*On constate donc que la relation de récurrence est identique et compte tenu de la règle de normalisation sur l'intégrale :*

$$\int_0^\pi dx\, me_\nu(x,q) me_\nu(-x,q) = \pi \Rightarrow \sum_{l=-\infty}^{l=+\infty} \left(c_l^{\nu}(q)\right)^2 = 1$$

*on en déduit bien que :* $\overline{c_{2l}^{\bar\nu}(\bar q)} = c_{2l}^{\nu}(q)$.

*Lorsque l'exposant de Floquet ν est purement imaginaire, soit $\nu = i\tau$, et q réel il vient :*

$$\left.\begin{matrix} \overline{c_{2l}^{-i\tau}(q)} = c_{2l}^{i\tau}(q) \\ c_{2l}^{-i\tau}(q) = c_{-2l}^{i\tau}(q) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} me_{i\tau}(z,q) = e^{-\tau z} \sum_{l=-\infty}^{l=+\infty} c_{2l}^{i\tau}(q) e^{2ilz} = e^{-\tau z}\left\{ c_0^{i\tau}(q) + \sum_{l=1}^{l=+\infty} c_{2l}^{i\tau}(q) e^{2ilz} + \sum_{l=-\infty}^{l=-1} c_{2l}^{i\tau}(q) e^{2ilz} \right\} \\ = e^{-\tau z}\left\{ c_0^{i\tau}(q) + \sum_{l=1}^{l=+\infty} c_{2l}^{i\tau}(q) e^{2ilz} + \sum_{l=1}^{l=+\infty} c_{-2l}^{i\tau}(q) e^{-2ilz} \right\} = e^{-\tau z}\left\{ c_0^{i\tau}(q) + \sum_{l=1}^{l=+\infty} \left\{ c_{2l}^{i\tau}(q) e^{2ilz} + c_{-2l}^{i\tau}(q) e^{-2ilz} \right\} \right\} \\ = e^{-\tau z}\left\{ c_0^{i\tau}(q) + \sum_{l=1}^{l=+\infty} \left\{ c_{2l}^{i\tau}(q) e^{2ilz} + \overline{c_{2l}^{i\tau}(q)} e^{-2ilz} \right\} \right\} \in \mathbf{R} \end{cases}$$

*que ce passe-t-il : $\nu = n + i\tau$*

*à finir*

*Résumé de quelques propriétés des coefficients de Fourier pour les fonctions de Mathieu angulaire d'ordre quelconque*

$$\begin{cases} c_{-2l}^{-\nu}(q) = c_{2l}^{\nu}(q) \\ c_{2l}^{\nu}(-q) = (-1)^{l} c_{2l}^{\nu}(q) \\ \overline{c_{2l}^{\overline{\nu}}(\overline{q})} = c_{2l}^{\nu}(q) \end{cases} .$$

$$\nu = i\tau \Rightarrow \begin{cases} \overline{c_{2l}^{-i\tau}(q)} = c_{2l}^{i\tau}(q) \rightarrow \overline{c_{2l}^{i\tau}(q)} = c_{2l}^{-i\tau}(q) = c_{-2l}^{i\tau}(q) \\ c_{-2l}^{-i\tau}(q) = c_{2l}^{i\tau}(q) \rightarrow c_{2l}^{-i\tau}(q) = c_{-2l}^{i\tau}(q) \end{cases}$$

***Construction des solutions radiales d'ordre non-entier de l'équation de Mathieu modifiée***

*Les fonctions de Mathieu modifiées sont solutions de l'équation modifiée de Mathieu :* $f''(z) - (\lambda - 2q\,Cosh(2z))f(z) = 0$. *A partir de la construction des fonctions angulaires paires et impaires, on peut en déduire les fonctions radiales paires et impaires sous la forme :*

$$\begin{aligned} & Je_\nu(z,q) = ce_\nu(\pm iz,q) \quad Jo_\nu(z,q) = \mp ise_\nu(\pm iz,q) \\ & me_\nu(z,q) = ce_\nu(z,q) + ise_\nu(z,q) \Rightarrow me_\nu(-iz,q) = ce_\nu(-iz,q) + ise_\nu(-iz,q) = Je_\nu(z,q) + Jo_\nu(z,q) \\ & Me_\nu(z,q) = me_\nu(-iz,q) = Je_\nu(z,q) + Jo_\nu(z,q) \\ & \Rightarrow Je_\nu(z,q) = \frac{Me_\nu(z,q) + Me_\nu(-z,q)}{2} \quad Jo_\nu(z,q) = \frac{Me_\nu(z,q) - Me_\nu(-z,q)}{2} \end{aligned}$$

*Les fonctions radiales Me, Je et Jo sont à valeur réelle et admettent le développement :*

$$Me_\nu(z,q) = me_\nu(-iz,q) = \sum_{l=-\infty}^{l=+\infty} c_l^{\nu}(q) e^{z(\nu+2l)} \Rightarrow \begin{cases} Je_\nu(z,q) = \sum_{l=-\infty}^{l=+\infty} c_l^{\nu}(q) Cosh(z(\nu+2l)) \\ Jo_\nu(z,q) = \sum_{l=-\infty}^{l=+\infty} c_l^{\nu}(q) Sinh(z(\nu+2l)) \end{cases}$$

*Ces fonctions radiales paires et impaires sont indépendantes. Pour certains autres problèmes aux limites, on est amené à utiliser parfois d'autres combinaisons linéaires de fonctions indépendantes comme les fonctions* $M_\nu^{(j)}$ *par exemple, où l'indice désigne l'utilisation de développements avdc les fonctions cylindrique de Bessel J, Y et Hankel H1 et H2. Les fonctions Mc et Ms sont remplacées par une seule fonction* $M_\nu^{(j)}$ *. La connexion avec la fonction radiale Me exprime la stricte proportionnalité avec la fonction* $M_\nu^{(1)}$ *. Elle est établit comme suit :*

$$\frac{Me_\nu(z,q)}{Me_\nu(0,q)} = \frac{M_\nu^{(1)}(z,q)}{M_\nu^{(1)}(0,q)} \quad \text{sachant que} \quad Me_\nu(0,q) = me_\nu(0,q)$$

$$\text{Soit} \quad \frac{Me_\nu(z,q)}{me_\nu(0,q)} = \frac{M_\nu^{(1)}(z,q)}{M_\nu^{(1)}(0,q)}$$

*Ces dernières fonctions $M_\nu^{(j)}$ sont indépendantes deux à deux suivant l'indice j=1,2,3,4. Elles sont de la forme :*

$$j=1,2,3,4 \quad C_\nu^{(1)}(x)=J_\nu(x) \quad C_\nu^{(2)}(x)=Y_\nu(x)=N_\nu(x) \quad C_\nu^{(3)}(x)=H_\nu^{(1)}(x)=J_\nu(x)+iY_\nu(x) \quad C_\nu^{(4)}(x)=H_\nu^{(2)}(x)=J_\nu(x)-iY_\nu(x)$$

$$\begin{cases} M_\nu^{(j)}(z,q)=\dfrac{1}{me_\nu(0,q)}\displaystyle\sum_{l=-\infty}^{l=+\infty}(-1)^l c_l^\nu(q)C_{\nu+2l}^{(j)}\left(2\sqrt{q}Cosh(z)\right) \quad M_\nu^{(j)}(z,q)=\dfrac{iTanh(z)}{me_\nu'(0,q)}\displaystyle\sum_{l=-\infty}^{l=+\infty}(-1)^l(\nu+2l)c_l^\nu(q)C_{\nu+2l}^{(j)}\left(2\sqrt{q}Cosh(z)\right) \\ D\acute{e}veloppements\ valides\ pour\ \mathrm{Re}(z)>0 \quad et \quad |Cosh(z)|>1 \quad si \quad j=2,3,4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} M_\nu^{(j)}(z,q)=\dfrac{e^{\frac{i\nu\pi}{2}}}{me_\nu(\pi/2,q)}\displaystyle\sum_{l=-\infty}^{l=+\infty}c_l^\nu(q)C_{\nu+2l}^{(j)}\left(2\sqrt{q}Sinh(z)\right) \quad M_\nu^{(j)}(z,q)=\dfrac{ie^{\frac{i\nu\pi}{2}}Coth(z)}{me_\nu'(\pi/2,q)}\displaystyle\sum_{l=-\infty}^{l=+\infty}(\nu+2l)c_l^\nu(q)C_{\nu+2l}^{(j)}\left(2\sqrt{q}Sinh(z)\right) \\ D\acute{e}veloppements\ valides\ pour\ \mathrm{Re}(z)>0 \quad et \quad |Sinh(z)|>1 \quad si \quad j=2,3,4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} s/Max\left(\left|c_l^\nu(q)\right|, l\in]-\infty,+\infty[\right) \quad M_\nu^{(j)}(z,q)=\dfrac{1}{c_s^\nu(q)}\displaystyle\sum_{l=-\infty}^{l=+\infty}(-1)^l c_l^\nu(q)J_{l-s}\left(\sqrt{q}e^{-z}\right)C_{\nu+l+s}^{(j)}\left(\sqrt{q}e^{z}\right) \\ \forall z\in\mathbf{C} \end{cases}$$

.

*Les dérivées premières des fonctions $M_\nu^{(j)}$ s'écrivent :*

$$j=1,2,3,4 \quad C_\nu^{(1)}(x)=J_\nu(x) \quad C_\nu^{(2)}(x)=Y_\nu(x)=N_\nu(x) \quad C_\nu^{(3)}(x)=H_\nu^{(1)}(x)=J_\nu(x)+iY_\nu(x) \quad C_\nu^{(4)}(x)=H_\nu^{(2)}(x)=J_\nu(x)-iY_\nu(x)$$

$$\begin{cases} M_\nu^{(j)}{}'(z,q)=\dfrac{\sqrt{q}Sinh(z)}{me_\nu(0,q)}\displaystyle\sum_{l=-\infty}^{l=+\infty}(-1)^l c_l^\nu(q)\left\{C_{\nu+2l-1}^{(j)}\left(2\sqrt{q}Cosh(z)\right)-C_{\nu+2l+1}^{(j)}\left(2\sqrt{q}Cosh(z)\right)\right\} \\ M_\nu^{(j)}{}'(z,q)=\dfrac{i}{me_\nu{}'(0,q)}\displaystyle\sum_{l=-\infty}^{l=+\infty}(-1)^l(\nu+2l)c_l^\nu(q)\begin{Bmatrix}\dfrac{Sinh^2(z)\sqrt{q}}{Cosh(z)}\left\{C_{\nu+2l-1}^{(j)}\left(2\sqrt{q}Cosh(z)\right)-C_{\nu+2l+1}^{(j)}\left(2\sqrt{q}Cosh(z)\right)\right\}+ \\ +\dfrac{1}{Cosh^2(z)}C_{\nu+2l}^{(j)}\left(2\sqrt{q}Cosh(z)\right)\end{Bmatrix} \\ \textit{Développements valides pour } \operatorname{Re}(z)>0 \quad et \quad |Cosh(z)|>1 \quad si \quad j=2,3,4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} M_\nu^{(j)}{}'(z,q)=\dfrac{e^{\frac{i\nu\pi}{2}}\sqrt{q}Cosh(z)}{me_\nu(\pi/2,q)}\displaystyle\sum_{l=-\infty}^{l=+\infty}c_l^\nu(q)\left\{C_{\nu+2l-1}^{(j)}\left(2\sqrt{q}Sinh(z)\right)-C_{\nu+2l+1}^{(j)}\left(2\sqrt{q}Sinh(z)\right)\right\} \\ M_\nu^{(j)}{}'(z,q)=\dfrac{ie^{\frac{i\nu\pi}{2}}}{me_\nu{}'(\pi/2,q)}\displaystyle\sum_{l=-\infty}^{l=+\infty}(\nu+2l)c_l^\nu(q)\begin{Bmatrix}\dfrac{Cosh^2(z)\sqrt{q}}{Sinh(z)}\left\{C_{\nu+2l-1}^{(j)}\left(2\sqrt{q}Sinh(z)\right)-C_{\nu+2l+1}^{(j)}\left(2\sqrt{q}Sinh(z)\right)\right\}- \\ -\dfrac{1}{Sinh^2(z)}C_{\nu+2l}^{(j)}\left(2\sqrt{q}Sinh(z)\right)\end{Bmatrix} \\ \textit{Développements valides pour } \operatorname{Re}(z)>0 \quad et \quad |Sinh(z)|>1 \quad si \quad j=2,3,4 \end{cases}$$

$$\left\{ s / Max\left(\left|c_l^\nu(q)\right|, l\in\left]-\infty,+\infty\right[\right) \quad M_\nu^{(j)}{}'(z,q)=\frac{1}{2c_s^\nu(q)}\sum_{l=-\infty}^{l=+\infty}(-1)^l c_{sl}^\nu(q)\begin{Bmatrix}\sqrt{q}e^z J_{l-s}\left(\sqrt{q}e^{-z}\right)\left\{C_{\nu+l+s+1}^{(j)}\left(\sqrt{q}e^z\right)-C_{\nu+l+s-1}^{(j)}\left(\sqrt{q}e^z\right)\right\}- \\ -\sqrt{q}e^{-z}\left\{J_{l-s-1}\left(\sqrt{q}e^{-z}\right)-J_{l-s+1}\left(\sqrt{q}e^{-z}\right)\right\}C_{\nu+l+s}^{(j)}\left(\sqrt{q}e^z\right)\end{Bmatrix} \right. \qquad \forall z\in\mathbf{C}$$

*Le Wronskien $M_\nu^{(1)}$ et $M_\nu^{(2)}$ est :*

$$W\left\{M_\nu^{(1)}(z,q),M_\nu^{(2)}(z,q)\right\}=M_\nu^{(1)}(z,q)M_\nu^{(2)}{}'(z,q)-M_\nu^{(1)}{}'(z,q)M_\nu^{(2)}(z,q)=\frac{2}{\pi}$$

*Le Wronskien $M_\nu^{(1)}$ et $M_\nu^{(3)}$ est :*

$$W\left\{M_\nu^{(1)}(z,q),M_\nu^{(3)}(z,q)\right\}=M_\nu^{(1)}(z,q)M_\nu^{(3)}{}'(z,q)-M_\nu^{(1)}{}'(z,q)M_\nu^{(3)}(z,q)=\frac{2i}{\pi}$$

*Les formules de connexions concernant les fonctions radiales Je et Jo sont simples :*

$$Je_\nu(z,q)=\frac{Me_\nu(z,q)+Me_\nu(-z,q)}{2} \qquad Jo_\nu(z,q)=\frac{Me_\nu(z,q)-Me_\nu(-z,q)}{2} \qquad Me_\nu(z,q)=\frac{me_\nu(0,q)M_\nu^{(1)}(z,q)}{M_\nu^{(1)}(0,q)}$$

$$Je_\nu(z,q)=\frac{me_\nu(0,q)}{M_\nu^{(1)}(0,q)}\frac{M_\nu^{(1)}(z,q)+M_\nu^{(1)}(-z,q)}{2} \qquad Jo_\nu(z,q)=\frac{me_\nu(0,q)}{M_\nu^{(1)}(0,q)}\frac{M_\nu^{(1)}(z,q)-M_\nu^{(1)}(-z,q)}{2}$$

*Pour ces deux dernières fonctions c'est le développement en produit de fonctions de Bessel valable sur tout le plan complexe qu'il faut utiliser :*

$$s / Max\left(\left|c_l^\nu(q)\right|, l \in \left]-\infty,+\infty\right[\right) \quad \begin{cases} M_\nu^{(1)}(z,q) = \dfrac{1}{c_s^\nu(q)} \displaystyle\sum_{l=-\infty}^{l=+\infty} (-1)^l c_l^\nu(q) J_{l-s}\left(\sqrt{q}e^{-z}\right) J_{\nu+l+s}\left(\sqrt{q}e^{z}\right) \\ \Rightarrow M_\nu^{(1)}(0,q) = \dfrac{1}{c_s^\nu(q)} \displaystyle\sum_{l=-\infty}^{l=+\infty} (-1)^l c_l^\nu(q) J_{l-s}\left(\sqrt{q}\right) J_{\nu+l+s}\left(\sqrt{q}\right) \end{cases}$$

$$J\begin{Bmatrix} e \\ o \end{Bmatrix}_\nu (z,q) = \frac{me_\nu(0,q)}{M_\nu^{(1)}(0,q)} \frac{M_\nu^{(1)}(z,q) \pm M_\nu^{(1)}(-z,q)}{2} = \frac{me_\nu(0,q)}{M_\nu^{(1)}(0,q)} \frac{1}{2c_s^\nu(q)} \sum_{l=-\infty}^{l=+\infty} (-1)^l c_l^\nu(q) \left\{ J_{l-s}\left(\sqrt{q}e^{-z}\right) J_{\nu+l+s}\left(\sqrt{q}e^{z}\right) \pm J_{l-s}\left(\sqrt{q}e^{z}\right) J_{\nu+l+s}\left(\sqrt{q}e^{-z}\right) \right\}$$

$$J\begin{Bmatrix} e \\ o \end{Bmatrix}_\nu '(z,q) = \frac{me_\nu(0,q)}{M_\nu^{(1)}(0,q)} \frac{M_\nu^{(1)}{}'(z,q) \mp M_\nu^{(1)}{}'(-z,q)}{2} = \frac{me_\nu(0,q)}{M_\nu^{(1)}(0,q)} \frac{1}{4c_s^\nu(q)} \sum_{l=-\infty}^{l=+\infty} (-1)^l c_{sl}^\nu(q) \left[ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{q}e^{z} J_{l-s}\left(\sqrt{q}e^{-z}\right) \left\{ J_{\nu+l+s+1}\left(\sqrt{q}e^{z}\right) - J_{\nu+l+s-1}\left(\sqrt{q}e^{z}\right) \right\} - \\ -\sqrt{q}e^{-z} \left\{ J_{l-s-1}\left(\sqrt{q}e^{-z}\right) - J_{l-s+1}\left(\sqrt{q}e^{-z}\right) \right\} J_{\nu+l+s}\left(\sqrt{q}e^{z}\right) \end{array} \right\} \mp \\ \mp \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{q}e^{-z} J_{l-s}\left(\sqrt{q}e^{z}\right) \left\{ J_{\nu+l+s+1}\left(\sqrt{q}e^{-z}\right) - J_{\nu+l+s-1}\left(\sqrt{q}e^{-z}\right) \right\} - \\ -\sqrt{q}e^{z} \left\{ J_{l-s-1}\left(\sqrt{q}e^{z}\right) - J_{l-s+1}\left(\sqrt{q}e^{z}\right) \right\} J_{\nu+l+s}\left(\sqrt{q}e^{-z}\right) \end{array} \right\} \end{array} \right]$$

*Il reste également à définir les fonctions solutions de l'équation modifiée avec le paramètre q négatif, soit solutions de l'équation modifiée :* $f''(z) - \left(\lambda + 2|q|\, Cosh(2z)\right) f(z) = 0$

*On part des formules de connexion des fonctions de Bessel J, H1 avec les fonctions de Bessel modifiées I et K :*

$$\begin{cases} I_\nu(z) = e^{\mp\frac{i\nu\pi}{2}} J_\nu\left(ze^{\pm\frac{i\pi}{2}}\right) & -\pi \le \pm Arg(z) \le \dfrac{\pi}{2} \\ K_\nu(x) = \dfrac{i\pi}{2} e^{+\frac{i\nu\pi}{2}} H_\nu^{(1)}\left(ze^{+\frac{i\pi}{2}}\right) & -\pi \le Arg(z) \le \dfrac{\pi}{2} \\ K_\nu(x) = -\dfrac{i\pi}{2} e^{-\frac{i\nu\pi}{2}} H_\nu^{(2)}\left(ze^{-\frac{i\pi}{2}}\right) & -\dfrac{\pi}{2} \le Arg(z) \le \pi \end{cases}$$

*Que l'on injecte dans les formules de la fonctions $M_\nu^{(1)}$ (z+iπ/2) pour q >0 :*

$$Cosh\left(z+\frac{i\pi}{2}\right)=Sinh(z)Sinh\left(\frac{i\pi}{2}\right)=iSinh(z)=e^{\frac{i\pi}{2}}Sinh(z)\quad Sinh\left(z+\frac{i\pi}{2}\right)=iCosh(z)=e^{\frac{i\pi}{2}}Cosh(z)\quad e^{\pm\left(z+\frac{i\pi}{2}\right)}=e^{\pm\frac{i\pi}{2}}e^{\pm z}$$

$$Tanh\left(z+\frac{i\pi}{2}\right)=Coth(z)\quad Coth\left(z+\frac{i\pi}{2}\right)=Tanh(z)$$

$$\Rightarrow M_\nu^{(1)}\left(z+\frac{i\pi}{2},q\right)=\frac{1}{me_\nu(0,q)}\sum_{l=-\infty}^{l=+\infty}(-1)^l c_l^\nu(q)e^{+\frac{i(\nu+2l)\pi}{2}}I_{\nu+2l}\left(2\sqrt{q}Sinh(z)\right)=\frac{e^{\frac{i\nu\pi}{2}}}{me_\nu(0,q)}\sum_{l=-\infty}^{l=+\infty}c_l^\nu(q)I_{\nu+2l}\left(2\sqrt{q}Sinh(z)\right)$$

$$\Rightarrow M_\nu^{(1)}\left(z+\frac{i\pi}{2},q\right)=\frac{e^{\frac{i\nu\pi}{2}}}{me_\nu(\pi/2,q)}\sum_{l=-\infty}^{l=+\infty}c_l^\nu(q)e^{+\frac{i(\nu+2l)\pi}{2}}I_{\nu+2l}\left(2\sqrt{q}Cosh(z)\right)=\frac{e^{i\nu\pi}}{me_\nu(\pi/2,q)}\sum_{l=-\infty}^{l=+\infty}(-1)^l c_l^\nu(q)I_{\nu+2l}\left(2\sqrt{q}Cosh(z)\right)$$

$$\Rightarrow M_\nu^{(1)}\left(z+\frac{i\pi}{2},q\right)=\frac{ie^{\frac{i\nu\pi}{2}}Coth(z)}{me_\nu'(0,q)}\sum_{l=-\infty}^{l=+\infty}(\nu+2l)c_l^\nu(q)I_{\nu+2l}\left(2\sqrt{q}Sinh(z)\right)$$

$$\Rightarrow M_\nu^{(1)}\left(z+\frac{i\pi}{2},q\right)=\frac{ie^{i\nu\pi}Tanh(z)}{me_\nu'(\pi/2,q)}\sum_{l=-\infty}^{l=+\infty}(-1)^l(\nu+2l)c_l^\nu(q)I_{\nu+2l}\left(2\sqrt{q}Cosh(z)\right)$$

$$\Rightarrow M_\nu^{(1)}\left(z+\frac{i\pi}{2},q\right)=\frac{(-1)^s e^{\frac{i\nu\pi}{2}}}{c_s^\nu(q)}\sum_{l=-\infty}^{l=+\infty}(-1)^l c_l^\nu(q)I_{l-s}\left(\sqrt{q}e^{-z}\right)I_{\nu+l+s}\left(\sqrt{q}e^{z}\right)\qquad s/Max\left(\left|c_l^\nu(q)\right|,\ l\in\left]-\infty,+\infty\right[\right)$$

*Puis dans les formules de la fonctions $M_\nu^{(3)}$ (z+iπ/2) également pour q > 0 :*

$$\Rightarrow M_\nu^{(3)}\left(z+\frac{i\pi}{2},q\right)=-\frac{2i}{\pi}\frac{e^{-\frac{i\nu\pi}{2}}}{me_\nu(0,q)}\sum_{l=-\infty}^{l=+\infty}c_l^\nu(q)K_{\nu+2l}\left(2\sqrt{q}Sinh(z)\right)$$

$$\Rightarrow M_\nu^{(3)}\left(z+\frac{i\pi}{2},q\right)=-\frac{2i}{\pi}\frac{1}{me_\nu(\pi/2,q)}\sum_{l=-\infty}^{l=+\infty}(-1)^l c_l^\nu(q)K_{\nu+2l}\left(2\sqrt{q}Cosh(z)\right)$$

$$\Rightarrow M_\nu^{(3)}\left(z+\frac{i\pi}{2},q\right)=-\frac{2i}{\pi}\frac{ie^{-\frac{i\nu\pi}{2}}Coth(z)}{me_\nu'(0,q)}\sum_{l=-\infty}^{l=+\infty}(\nu+2l)c_l^\nu(q)K_{\nu+2l}\left(2\sqrt{q}Sinh(z)\right)$$

$$\Rightarrow M_\nu^{(3)}\left(z+\frac{i\pi}{2},q\right)=-\frac{2i}{\pi}\frac{iTanh(z)}{me_\nu'(\pi/2,q)}\sum_{l=-\infty}^{l=+\infty}(-1)^l(\nu+2l)c_l^\nu(q)K_{\nu+2l}\left(2\sqrt{q}Cosh(z)\right)$$

$$\Rightarrow M_\nu^{(3)}\left(z+\frac{i\pi}{2},q\right)=-\frac{2i}{\pi}\frac{e^{-\frac{i\nu\pi}{2}}}{c_s^\nu(q)}\sum_{l=-\infty}^{l=+\infty}c_l^\nu(q)I_{l-s}\left(\sqrt{q}e^{-z}\right)K_{\nu+l+s}\left(\sqrt{q}e^{z}\right)\qquad s/Max\left(\left|c_l^\nu(q)\right|,\ l\in\left]-\infty,+\infty\right[\right)$$

*Par ce passage on peut alors définir les fonctions radiales modifiées de Mathieu avec le paramètre q <0 :*

$$j=1,2\quad \widetilde{C}_\nu^{(1)}(x)=I_\nu(x)\quad \widetilde{C}_\nu^{(2)}(x)=K_\nu(x)\qquad et\qquad q=-|q|$$

$$\widetilde{M}_\nu^{(j)}(z,|q|)=\frac{1}{me_\nu(0,q)}\sum_{l=-\infty}^{l=+\infty}c_l^\nu(|q|)\widetilde{C}_{\nu+2l}^{(j)}\left(2\sqrt{|q|}Sinh(z)\right)\quad \widetilde{M}_\nu^{(j)}(z,|q|)=\frac{iCoth(z)}{me_\nu'(0,|q|)}\sum_{l=-\infty}^{l=+\infty}(\nu+2l)c_l^\nu(|q|)\widetilde{C}_{\nu+2l}^{(j)}\left(2\sqrt{|q|}Sinh(z)\right)$$

$$\widetilde{M}_\nu^{(j)}(z,|q|)=\frac{e^{\frac{i\nu\pi}{2}}}{me_\nu(\pi/2,q)}\sum_{l=-\infty}^{l=+\infty}(-1)^l c_l^\nu(|q|)\widetilde{C}_{\nu+2l}^{(j)}\left(2\sqrt{|q|}Cosh(z)\right)\quad \widetilde{M}_\nu^{(j)}(z,|q|)=\frac{ie^{\frac{i\nu\pi}{2}}Tanh(z)}{me_\nu'(\pi/2,|q|)}\sum_{l=-\infty}^{l=+\infty}(-1)^l(\nu+2l)c_l^\nu(|q|)\widetilde{C}_{\nu+2l}^{(j)}\left(2\sqrt{|q|}Cosh(z)\right)$$

$$s/Max\left(\left|c_l^\nu(|q|)\right|,\ l\in\left]-\infty,+\infty\right[\right)\quad \widetilde{M}_\nu^{(j)}(z,|q|)=\frac{1}{c_s^\nu(|q|)}\sum_{l=-\infty}^{l=+\infty}(-1)^{l\times j}c_l^\nu(|q|)I_{l-s}\left(\sqrt{|q|}e^{-z}\right)\widetilde{C}_{\nu+l+s}^{(j)}\left(\sqrt{|q|}e^{z}\right)$$

*Soit les formules de connexion suivantes :*

$$\Rightarrow M_\nu^{(1)}\left(z+\frac{i\pi}{2},|q|\right)=e^{\frac{i\nu\pi}{2}}\widetilde{M}_\nu^{(1)}(z,|q|) \qquad M_\nu^{(3)}\left(z+\frac{i\pi}{2},|q|\right)=-\frac{2i}{\pi}e^{-\frac{i\nu\pi}{2}}\widetilde{M}_\nu^{(2)}(z,|q|)$$

*Etant donné ces formules de connexion, on en déduit tout de suite le Wronskien entre les deux fonctions de type 1 et 2 :* $W\left\{\widetilde{M}_\nu^{(1)}(z,q),\widetilde{M}_\nu^{(2)}(z,q)\right\}=\widetilde{M}_\nu^{(1)}(z,q)\widetilde{M}_\nu^{(2)}{}'(z,q)-\widetilde{M}_\nu^{(1)}{}'(z,q)\widetilde{M}_\nu^{(2)}(z,q)=-1$. *Les dérivées premières des fonctions radiales modifiées de Mathieu avec le paramètre q < 0 s'écrivent :*

$$j=1,2 \quad \widetilde{C}_\nu^{(1)}(x)=I_\nu(x) \quad \widetilde{C}_\nu^{(2)}(x)=K_\nu(x) \qquad et \qquad q=-|q|$$

$$\widetilde{M}_\nu^{(j)}{}'(z,|q|)=\frac{\sqrt{|q|}Cosh(z)(-1)^{j-1}}{me_\nu(0,|q|)}\sum_{l=-\infty}^{l=+\infty}c_l^\nu(|q|)\left\{\widetilde{C}_{\nu+2l-1}^{(j)}\left(2\sqrt{|q|}Sinh(z)\right)+\widetilde{C}_{\nu+2l+1}^{(j)}\left(2\sqrt{|q|}Sinh(z)\right)\right\}$$

$$\widetilde{M}_\nu^{(j)}{}'(z,|q|)=\frac{i}{me_\nu{}'(0,|q|)}\sum_{l=-\infty}^{l=+\infty}(\nu+2l)c_l^\nu(|q|)\left\{-\frac{\widetilde{C}_{\nu+2l}^{(j)}\left(2\sqrt{|q|}Sinh(z)\right)}{Sinh^2(z)}+\sqrt{|q|}(-1)^{j-1}\frac{Cosh^2(z)}{Sinh(z)}\left\{\widetilde{C}_{\nu+2l-1}^{(j)}\left(2\sqrt{|q|}Sinh(z)\right)+\widetilde{C}_{\nu+2l+1}^{(j)}\left(2\sqrt{|q|}Sinh(z)\right)\right\}\right\}$$

$$\widetilde{M}_\nu^{(j)}{}'(z,|q|)=\frac{e^{\frac{i\nu\pi}{2}}(-1)^{j-1}\sqrt{q}Sinh(z)}{me_\nu(\pi/2,q)}\sum_{l=-\infty}^{l=+\infty}(-1)^l c_l^\nu(|q|)\left\{\widetilde{C}_{\nu+2l-1}^{(j)}\left(2\sqrt{|q|}Cosh(z)\right)+\widetilde{C}_{\nu+2l+1}^{(j)}\left(2\sqrt{|q|}Cosh(z)\right)\right\}$$

$$\widetilde{M}_\nu^{(j)}{}'(z,|q|)=\frac{ie^{\frac{i\nu\pi}{2}}}{me_\nu{}'(\pi/2,|q|)}\sum_{l=-\infty}^{l=+\infty}(-1)^l(\nu+2l)c_n^\nu(|q|)\left\{\sqrt{|q|}(-1)^{j-1}\frac{Sinh^2(z)}{Cosh(z)}\left\{\widetilde{C}_{\nu+2l-1}^{(j)}\left(2\sqrt{|q|}Cosh(z)\right)+\widetilde{C}_{\nu+2l+1}^{(j)}\left(2\sqrt{|q|}Cosh(z)\right)\right\}+\frac{\widetilde{C}_{\nu+2l}^{(j)}\left(2\sqrt{|q|}Cosh(z)\right)}{Cosh^2(z)}\right\}$$

$$s/Max\left(\left|c_l^\nu(|q|)\right|,l\in\left]-\infty,+\infty\right[\right) \quad \widetilde{M}_\nu^{(j)}(z,|q|)=\frac{\sqrt{q}}{2c_s^\nu(q)}\sum_{l=-\infty}^{l=+\infty}(-1)^{l\times j}c_l^\nu(|q|)\left\{\begin{array}{l}-e^{-z}\left(I_{l-s-1}\left(\sqrt{|q|}e^{-z}\right)+I_{l-s+1}\left(\sqrt{|q|}e^{-z}\right)\right)\widetilde{C}_{\nu+l+s}^{(j)}\left(\sqrt{|q|}e^{z}\right)+\\+e^{z}(-1)^{j-1}I_{l-s}\left(\sqrt{|q|}e^{-z}\right)\left(\widetilde{C}_{\nu+l+s+1}^{(j)}\left(\sqrt{|q|}e^{z}\right)+\widetilde{C}_{\nu+l+s-1}^{(j)}\left(\sqrt{|q|}e^{z}\right)\right)\end{array}\right\}$$

*Ces deux fonctions radiales sont bien solutions de l'équation différentielle pour q < 0 :*

$$\begin{array}{l}y''(z)-(\lambda-2q\ Cosh(2z))y(z)=0\\ \Leftrightarrow y''(z)-(\lambda+2|q|\ Cosh(2z))y(z)=0\end{array}$$

*Pour se rapprocher des fonctions de Bessel modifiées I et K, utilisation également la notation*

$$I_\nu^m(z,|q|)=\widetilde{M}_\nu^{(1)}(z,|q|) \qquad K_\nu^m(z,|q|)=\widetilde{M}_\nu^{(2)}(z,|q|)$$

*Et notons ces fonctions n'ont pas été construite de manière à être paire ou impaire, contrairement aux fonctions modifiées de Mathieu d'ordre entier (radiales), Ie,Ke,Io,ko.*

## *Quelques propriétés des fonctions de Mathieu radiales $I^m_\nu$ et $K^m_\nu$ d'ordre purement imaginaire*

*Par ailleurs suite aux formules de connexion entre les fonctions de Mathieu radiales d'ordre non-entier selon le changement de signe du paramètre q :*

$$\Rightarrow M_\nu^{(1)}\left(z+\frac{i\pi}{2},q\right)=e^{\frac{i\nu\pi}{2}}\widetilde{M}_\nu^{(1)}(z,q)=e^{\frac{i\nu\pi}{2}}I_\nu^m(z,q) \qquad M_\nu^{(3)}\left(z+\frac{i\pi}{2},q\right)=-\frac{2i}{\pi}e^{-\frac{i\nu\pi}{2}}\widetilde{M}_\nu^{(2)}(z,q)=-\frac{2i}{\pi}e^{-\frac{i\nu\pi}{2}}K_\nu^m(z,q).$$

*Lorsque l'exposant de Floquet (ou ordre) est purement imaginaire, nous posons :*

$$\nu=i\tau\Rightarrow M_{i\tau}^{(1)}\left(z+\frac{i\pi}{2},q\right)=e^{-\frac{\tau\pi}{2}}I_{i\tau}^m(z,q) \qquad M_{i\tau}^{(3)}\left(z+\frac{i\pi}{2},q\right)=-\frac{2i}{\pi}e^{+\frac{\tau\pi}{2}}K_{i\tau}^m(z,q)$$

*On sait que les fonctions de MacDonald sont à valeur réelle, et pour les fonctions de Bessel modifiées I d'ordre purement imaginaire leur partie imaginaire est proportionnelle à la fonction de MacDonald, plus précisément à l'aide des formules de connexion entre fonctions de Bessel modifiée I et K (voir l'article de T.M.Dunster de 1990, «Bessel Functions of Purely Imaginary Order » ) :*

$$x\in\mathbf{R}\rightarrow K_{i\tau}(x)=\frac{\pi}{2iSinh(\pi\tau)}\{I_{-i\tau}(x)-I_{i\tau}(x)\} \quad et \quad \overline{I_{i\tau}(x)}=I_{-i\tau}(x)\Rightarrow I_{-i\tau}(x)-I_{i\tau}(x)=-2i\,\mathrm{Im}(I_{i\tau}(x))$$
$$\Rightarrow K_{i\tau}(x)=-\frac{\pi}{Sinh(\pi\tau)}\mathrm{Im}(I_{i\tau}(x)) \quad et \quad K_{i\tau+2l}(x)=-\frac{i\pi}{2Sinh(\pi\tau)}\{I_{-i\tau-2l}(x)-I_{i\tau+2l}(x)\}$$
$$De\ plus \qquad K_{i\tau+2l}(x)=K_{-i\tau-2l}(x)$$

*Avant d'utiliser ces deux formules de connexion rappelons la construction de la fonction angulaire me :*

$$x\in\mathbf{R}\rightarrow me_\nu(x,q)=\sum_{l=-\infty}^{l=+\infty}c_{2l}^{\nu}(q)e^{i(\nu+2l)x}\Rightarrow me_{i\tau}(x,q)=e^{-\tau x}\sum_{l=-\infty}^{l=+\infty}c_{2l}^{i\tau}(q)e^{2ilx}$$
$$Propriété\ miroir \quad \overline{me_{\bar\nu}(\bar z,q)}=me_\nu(-z,q)\Rightarrow\overline{me_{-i\tau}(x,q)}=me_{i\tau}(-x,q) \quad et \quad \overline{me_{i\tau}(x,q)}=me_{-i\tau}(-x,q)$$
$$Pour\ x=0\rightarrow me_{i\tau}(0,q)=\sum_{l=-\infty}^{l=+\infty}c_{2l}^{i\tau}(q) \quad et \quad me_{-i\tau}(0,q)=\sum_{l=-\infty}^{l=+\infty}c_{2l}^{-i\tau}(q)=\sum_{l=-\infty}^{l=+\infty}c_{-2l}^{-i\tau}(q)$$
$$Or \quad c_{-2l}^{-i\tau}(q)=c_{2l}^{i\tau}(q)\Rightarrow me_{-i\tau}(0,q)=\sum_{l=-\infty}^{l=+\infty}c_{2l}^{i\tau}(q)=me_{i\tau}(0,q)\Rightarrow me_{i\tau}(0,q)\in\mathbf{R}$$
$$\Rightarrow me_{-i\tau}(-x,q)=e^{-\tau x}\sum_{l=-\infty}^{l=+\infty}c_{2l}^{-i\tau}(q)e^{-2ilx}=e^{-\tau x}\sum_{l=-\infty}^{l=+\infty}c_{-2l}^{-i\tau}(q)e^{2ilx}=me_{i\tau}(x,q)$$

*De la propriété miroir, on en déduit les propriétés suivantes pour les fonctions paires et impaires de Mathieu angulaires :*

$$\Rightarrow me_{-i\tau}(-x,q) = me_{i\tau}(x,q) = \overline{me_{-i\tau}(x,q)} = \overline{me_{i\tau}(-x,q)} \Rightarrow me_{-i\tau}(0,q) = me_{i\tau}(0,q)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ce_{i\tau}(x,q) = \frac{1}{2}\{me_{i\tau}(x,q) + me_{i\tau}(-x,q)\} = \frac{1}{2}\{me_{i\tau}(x,q) + \overline{me_{i\tau}(x,q)}\} = \mathrm{Re}(me_{i\tau}(x,q)) \in \mathbf{R} \\ se_{i\tau}(x,q) = \frac{1}{2i}\{me_{i\tau}(x,q) - me_{i\tau}(-x,q)\} = \frac{1}{2i}\{me_{i\tau}(x,q) - \overline{me_{i\tau}(x,q)}\} = \mathrm{Im}(me_{i\tau}(x,q)) \in \mathbf{R} \end{cases}$$

*Étant données toutes ces formules, on peut tout de suite en déduire une valeur réelle pour la fonction $K^m_{i\tau}$ :*

$$K^m_{i\tau}(x,q) = \frac{1}{me_{i\tau}(0,q)} \sum_{l=-\infty}^{l=+\infty} c^{i\tau}_{2l}(q) K_{i\tau+2l}\left(2\sqrt{q}Sinh(x)\right) \qquad \textit{sachant que} \quad K_{-i\tau-2l}\left(2\sqrt{q}Sinh(x)\right) = K_{i\tau+2l}\left(2\sqrt{q}Sinh(x)\right)$$

$$K^m_{-i\tau}(x,q) = \overline{K^m_{i\tau}(x,q)} = \frac{1}{me_{-i\tau}(0,q)} \sum_{l=-\infty}^{l=+\infty} c^{-i\tau}_{2l}(q) K_{-i\tau+2l}\left(2\sqrt{q}Sinh(x)\right) = \frac{1}{me_{i\tau}(0,q)} \sum_{l=-\infty}^{l=+\infty} c^{-i\tau}_{-2l}(q) K_{-i\tau-2l}\left(2\sqrt{q}Sinh(x)\right) = K^m_{i\tau}(x,q)$$

$$\Rightarrow K^m_{i\tau}(x,q) \in \mathbf{R}$$

*Pour la fonction $I^m_{i\tau}$ il vient alors une formule de connexion similaire entre les fonctions I et K :*

$$I^m_{i\tau}(x,q) = \frac{1}{me_{i\tau}(0,q)} \sum_{l=-\infty}^{l=+\infty} c^{i\tau}_{2l}(q) I_{i\tau+2l}\left(2\sqrt{q}Sinh(x)\right)$$

$$I^m_{-i\tau}(x,q) = \frac{1}{me_{-i\tau}(0,q)} \sum_{l=-\infty}^{l=+\infty} c^{-i\tau}_{2l}(q) I_{-i\tau+2l}\left(2\sqrt{q}Sinh(x)\right) = \frac{1}{me_{i\tau}(0,q)} \sum_{l=-\infty}^{l=+\infty} c^{-i\tau}_{-2l}(q) I_{-i\tau-2l}\left(2\sqrt{q}Sinh(x)\right) = \frac{1}{me_{i\tau}(0,q)} \sum_{l=-\infty}^{l=+\infty} c^{i\tau}_{2l}(q) I_{-i\tau-2l}\left(2\sqrt{q}Sinh(x)\right)$$

$$\Rightarrow -\frac{i\pi}{2Sinh(\pi\tau)}\left\{I^m_{-i\tau}(x,q) - I^m_{i\tau}(x,q)\right\} = \frac{1}{me_{i\tau}(0,q)} \sum_{l=-\infty}^{l=+\infty} c^{i\tau}_{2l}(q) \frac{\pi}{2iSinh(\pi\tau)}\left\{I_{-i\tau-2l}\left(2\sqrt{q}Sinh(x)\right) - I_{i\tau+2l}\left(2\sqrt{q}Sinh(x)\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{me_{i\tau}(0,q)} \sum_{l=-\infty}^{l=+\infty} c^{i\tau}_{2l}(q) K_{i\tau+2l}\left(2\sqrt{q}Sinh(x)\right) =$$

$$\Rightarrow K^m_{i\tau}(x,q) = -\frac{i\pi}{2Sinh(\pi\tau)}\left\{I^m_{-i\tau}(x,q) - I^m_{i\tau}(x,q)\right\}$$

*On peut retranscrire cette formule de connexion à l'aide de la partie imaginaire de la fonction $I^m_{i\tau}$:*

$$\overline{I^m_{i\tau}(x,q)} = \frac{1}{\overline{me_{i\tau}(0,q)}} \sum_{l=-\infty}^{l=+\infty} \overline{c^{i\tau}_{2l}(q)} \overline{I_{i\tau+2l}\left(2\sqrt{q}Sinh(x)\right)} = \frac{1}{me_{i\tau}(0,q)} \sum_{l=-\infty}^{l=+\infty} c^{i\tau}_{-2l}(q) I_{-i\tau+2l}\left(2\sqrt{q}Sinh(x)\right) = \frac{1}{me_{-i\tau}(0,q)} \sum_{l=-\infty}^{l=+\infty} c^{-i\tau}_{2l}(q) I_{-i\tau+2l}\left(2\sqrt{q}Sinh(x)\right)$$

$$\Rightarrow \overline{I^m_{i\tau}(x,q)} = I^m_{-i\tau}(x,q) \Rightarrow K^m_{i\tau}(x,q) = -\frac{i\pi}{2Sinh(\pi\tau)}\left\{I^m_{-i\tau}(x,q) - I^m_{i\tau}(x,q)\right\} = \frac{i\pi}{2Sinh(\pi\tau)}\left\{I^m_{i\tau}(x,q) - \overline{I^m_{i\tau}(x,q)}\right\} = -\frac{\pi}{Sinh(\pi\tau)}\mathrm{Im}\left\{I^m_{i\tau}(x,q)\right\}$$

*Soit que la fonction $K^m_{i\tau}$ est proportionnelle à la partie imaginaire de la fonction $I^m_{i\tau}$. Cette dernière propriété a une conséquence immédiate sur **la combinaison linéaire suivante qui a toujours à valeur réelle :*** $I^m_{i\tau}(x,q)K^m_{i\tau}(x_0,q) - I^m_{i\tau}(x_0,q)K^m_{i\tau}(x,q)$ *quelque soit x et x0 à valeur réelle. Pour s'en convaincre il suffit de séparer pour la fonction $I^m_{i\tau}$ la partie réelle et imaginaire, cette dernière s'annulant dans la combinaison linéaire.*

*Pour ce qui est de la construction d'une fonction indépendante de type $I^m{}_{i\tau}$ il vient d'après la propriété miroir :*

$$\overline{I_{i\tau}^{m}(x,q)+I_{-i\tau}^{m}(x,q)}=\overline{I_{i\tau}^{m}(x,q)}+\overline{I_{-i\tau}^{m}(x,q)}=I_{i\tau}^{m}(x,q)+I_{-i\tau}^{m}(x,q)\in\mathbf{R}$$
$$I_{i\tau}^{m}(x,q)+I_{-i\tau}^{m}(x,q)=\frac{1}{me_{i\tau}(0,q)}\sum_{l=-\infty}^{l=+\infty}c_{l}^{i\tau}(q)\left\{I_{i\tau+2l}\left(2\sqrt{q}Sinh(x)\right)+I_{-i\tau-2l}\left(2\sqrt{q}Sinh(x)\right)\right\}$$

*A partir de cette propriété miroir on peut en déduire une propriété supplémentaire sur les coefficient de Fourier de la fonction me:*

$$\overline{I_{i\tau}^{m}(x,q)+I_{-i\tau}^{m}(x,q)}=\overline{I_{i\tau}^{m}(x,q)}+\overline{I_{-i\tau}^{m}(x,q)}=I_{i\tau}^{m}(x,q)+I_{-i\tau}^{m}(x,q)\in\mathbf{R}$$
$$\sum_{l=-\infty}^{l=+\infty}c_{2l}^{i\tau}(q)\left\{I_{i\tau+2l}\left(2\sqrt{q}Sinh(x)\right)+I_{-i\tau-2l}\left(2\sqrt{q}Sinh(x)\right)\right\}=\sum_{l=-\infty}^{l=+\infty}\overline{c_{2l}^{i\tau}(q)}\left\{\overline{I_{i\tau+2l}\left(2\sqrt{q}Sinh(x)\right)}+\overline{I_{-i\tau-2l}\left(2\sqrt{q}Sinh(x)\right)}\right\}$$
$$=\sum_{l=-\infty}^{l=+\infty}\left\{\overline{c_{-2l}^{i\tau}(q)}I_{-i\tau-2l}\left(2\sqrt{q}Sinh(x)\right)+\overline{c_{-2l}^{i\tau}(q)}I_{i\tau+2l}\left(2\sqrt{q}Sinh(x)\right)\right\}\sum_{l=-\infty}^{l=+\infty}\overline{c_{-2l}^{i\tau}(q)}\left\{I_{i\tau+2l}\left(2\sqrt{q}Sinh(x)\right)+I_{-i\tau-2l}\left(2\sqrt{q}Sinh(x)\right)\right\}$$
$$\Rightarrow\overline{c_{-2l}^{i\tau}(q)}=c_{2l}^{i\tau}(q)$$

*<u>Normalisation des fonctions $I^m{}_{i\tau}$ et $K^m{}_{i\tau}$</u>*

*De la construction de ces fonctions de Mathieu radiale d'ordre purement imaginaire, on voit que les facteurs exponentiels s'annulent ou divergent lorsque τ prend de grande valeur. Il est donc plus commode pour la résolution numérique de certaines équations transcendantales d'utiliser des fonctions normalisées desquelles on a neutraliser les facteurs exponentiels croissant ou décroissant . Par exemple la substitution suivante peut être opérée :*

$$\begin{cases}\mathrm{Re}\left\{I_{i\tau}^{m}(z,q)\right\}\\K_{i\tau}^{m}(z,q)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\widetilde{I}_{i\tau}^{m}(z,q)=e^{-\frac{\tau\pi}{2}}\,\mathrm{Re}\left\{I_{i\tau}^{m}(z,q)\right\}\\\widetilde{K}_{i\tau}^{m}(z,q)=-\frac{2}{\pi}e^{+\frac{\tau\pi}{2}}K_{i\tau}^{m}(z,q)\end{cases}$$

***Développement limité des solutions angulaires d'ordre non-entier de l'équation de Mathieu dans le cas d'un paramètre q proche de 0***

*La méthode décrite ici est exposée dans l'ouvrage de MacLachlan de 1947. Comme la solution recherchée est une solution périodique le développement limité est trouvé en éliminant les termes non périodiques. Travaillons avec une solution paire d'ordre non-entier. Pour cela on développe cette solution en puissance de q, en sachant que lorsque q=0, la solution paire est connue ainsi que la valeur de la caractéristique λ, ainsi que le paramètre caractéristique de l''équation de Mathieu*

$$y(x) = \tilde{c}e_{\nu}(x) = Cos(\nu x) + \sum_{r=1}^{r=+\infty} q^r \tilde{C}_r(\nu, x) \qquad \lambda(\nu) = \nu^2 + \sum_{r=1}^{r=+\infty} q^r \alpha_r(\nu).$$

*Et l'on injecte le tout dans l'équation de Mathieu :* $y''(x) + (\lambda(\nu) - 2qCos(2x))y(x) = 0$.

*En isolant chaque puissance de q, on obtient un système d'équations différentielles sinusoïdales du second degré comportant des termes inhomogènes de la forme :*

$$q^0 \to -\nu^2 Cos(\nu x) + \nu^2 Cos(\nu x) = 0$$
$$q^1 \to \tilde{C}_1''(\nu, x) + \nu^2 \tilde{C}_1(\nu, x) + Cos(\nu x)\alpha_1(\nu) - Cos((\nu-2)x) - Cos((\nu+2)x) = 0$$
$$q^2 \to \tilde{C}_2''(\nu, x) + \nu^2 \tilde{C}_2(\nu, x) + Cos(\nu x)\alpha_2(\nu) + \tilde{C}_1(\nu, x)\alpha_1(\nu) - 2C_1(\nu, x)Cos(2x) = 0$$
$$q^3 \to \tilde{C}_3''(\nu, x) + \nu^2 \tilde{C}_3(\nu, x) + Cos(\nu x)\alpha_3(\nu) + \tilde{C}_2(\nu, x)\alpha_1(\nu) + \tilde{C}_1(\nu, x)\alpha_2(\nu) - 2\tilde{C}_2(\nu, x)Cos(2x) = 0$$
$$q^4 \to \tilde{C}_4''(\nu, x) + \nu^2 \tilde{C}_4(\nu, x) + Cos(\nu x)\alpha_4(\nu) + \tilde{C}_3(\nu, x)\alpha_1(\nu) + \tilde{C}_2(\nu, x)\alpha_2(\nu) + \tilde{C}_1(\nu, x)\alpha_3(\nu) - 2\tilde{C}_3(\nu, x)Cos(2x) = 0$$
$$\dots$$

*Dans la résolution du système d'équations différentielles, on s'attache à déterminer les seules solutions particulières. Le principe est alors d'identifier pour chaque équation des termes non-périodiques dans la solution particulière. Dans ce système les seuls termes inhomogènes générant des solutions non périodiques sont les termes en Cos(vx) et Sin(vx). La solution particulière de l'équation différentielle :* $y''(\nu, x) + \nu^2 y(\nu, x) = Cos(\nu x)$ *est la suivante :* $y(\nu, x) = \frac{Cos(\nu x) + 2\nu x Sin(\nu x)}{4\nu^2}$

*sont alors de la forme non-périodique xSin(vx) ou xCos(vx). La solution particulière de cette équations différentielles est la suivante :* $y''(\nu, x) + \nu^2 y(\nu, x) = Cos(\mu x) \Rightarrow y(\nu, x) = -\frac{Cos(\mu x)}{\mu^2 - \nu^2}$.

*C'est l'exclusion de ces termes non-périodiques qui permet de déterminer les coefficients de la caractéristique λ. De proche en proche on détermine ainsi tous les termes. Les premiers termes sont assez facile à déterminer par un calcul direct, pour les termes d'ordre q plus important, on peut utiliser Mathematica pour les déterminer.*

*Voici le développement de la caractéristique λ jusqu'à l'ordre 8 :*

$$\lambda(\nu,q)=\nu^2+\sum_{r=1}^{r=+\infty}q^r\alpha_r(\nu) \quad \alpha_1(\nu)=\alpha_3(\nu)=\alpha_5(\nu)=\alpha_7(\nu)=\alpha_9(\nu)=\alpha_{11}(\nu)=0$$

$$\alpha_2(\nu)=\frac{1}{2(\nu^2-1)} \quad \alpha_4(\nu)=\frac{7+5\nu^2}{32(\nu^2-1)^3(\nu^2-4)} \quad \alpha_6(\nu)=\frac{29+58\nu^2+9\nu^4}{64(\nu^2-1)^5(\nu^2-4)(\nu^2-9)}$$

$$\alpha_8(\nu)=\frac{274748+827565\nu^2+64228\nu^4-140354\nu^6+9144\nu^8+1469\nu^{10}}{8192(\nu^2-1)^7(\nu^2-4)^3(\nu^2-9)(\nu^2-16)}.$$

*Pour obtenir des ordres supérieurs il suffit d'identifier les développements à l'ordre q recherché dans l'équation transcendantale qui permet d'établir la valeur du nombre caractéristique λ. Cette dernière met en jeu des fractions continues :*

$$\lambda(\nu,q)\to\lambda \quad \lambda-\nu^2-\cfrac{q^2}{\lambda-(\nu+2)^2-\cfrac{q^2}{\lambda-(\nu+4)^2-\cfrac{q^2}{\lambda-(\nu+6)^2-\cdots}}}=\cfrac{q^2}{\lambda-(\nu-2)^2-\cfrac{q^2}{\lambda-(\nu-4)^2-\cfrac{q^2}{\lambda-(\nu-6)^2-\cdots}}}$$

*Notation des fractions continues*

$$\lambda-\nu^2-\frac{q^2}{\lambda-(\nu+2)^2-}\,\frac{q^2}{\lambda-(\nu+4)^2-}\,\frac{q^2}{\lambda-(\nu+6)^2-}\cdots=\frac{q^2}{\lambda-(\nu-2)^2-}\,\frac{q^2}{\lambda-(\nu-4)^2-}\,\frac{q^2}{\lambda-(\nu-6)^2-}\cdots.$$

*En identifiant les puissances de q du développement limité, on retrouve les coefficients jusqu'à l'ordre 8, plus un autre coefficients à l'ordre 10 :*

$$\alpha_{10}(\nu)=\frac{4453452+20651309\nu^2+13541915\nu^4-2844430\nu^6-1039598\nu^8+69361\nu^{10}+4471\nu^{12}}{16384(\nu^2-1)^9(\nu^2-4)^3(\nu^2-9)(\nu^2-16)(\nu^2-25)}$$

*Et le développement de la solution angulaire paire des 6 premiers ordres :*

$$\tilde{c}e_{\nu}(x) = Cos(\nu\, x) + \sum_{r=1}^{r=+\infty} q^r \tilde{C}_r(\nu, x)$$

$$\tilde{C}_1(\nu, x) = \frac{1}{4}\left\{\frac{Cos((\nu-2)x)}{\nu-1} - \frac{Cos((\nu+2)x)}{\nu+1}\right\} \quad \tilde{C}_2(\nu, x) = \frac{1}{32}\left\{\frac{Cos((\nu-4)x)}{(\nu-1)(\nu-2)} + \frac{Cos((\nu+4)x)}{(\nu+1)(\nu+2)}\right\}$$

$$\tilde{C}_3(\nu, x) = \frac{Cos((\nu-6)x)}{384(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)} - \frac{Cos((\nu+6)x)}{384(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)} + \frac{(7-4\nu+\nu^2)Cos((\nu-2)x)}{128(\nu-1)^3(\nu-2)(\nu+1)} - \frac{(7+4\nu+\nu^2)Cos((\nu+2)x)}{128(\nu+1)^3(\nu+2)(\nu-1)}$$

$$\tilde{C}_4(\nu, x) = \frac{Cos((\nu-8)x)}{6144(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)(\nu-4)} + \frac{Cos((\nu+8)x)}{6144(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)(\nu+4)} + \frac{(10-5\nu+\nu^2)Cos((\nu-4)x)}{768(\nu-1)^3(\nu+1)(\nu-2)(\nu-3)} + \frac{(10+5\nu+\nu^2)Cos((\nu+4)x)}{768(\nu+1)^3(\nu-1)(\nu+2)(\nu+3)}$$

$$\tilde{C}_5(\nu, x) = \frac{Cos((\nu-10)x)}{122880(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)(\nu-4)(\nu-5)} - \frac{Cos((\nu+10)x)}{122880(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)(\nu+4)(\nu+5)} +$$

$$+ \frac{(13-6\nu+\nu^2)Cos((\nu-6)x)}{8192(\nu-1)^3(\nu+1)(\nu-2)(\nu-3)(\nu-4)} - \frac{(13+6\nu+\nu^2)Cos((\nu+6)x)}{8192(\nu+1)^3(\nu-1)(\nu+2)(\nu+3)(\nu+4)}$$

$$+ \frac{(232+13\nu+47\nu^2-8\nu^3+8\nu^4-5\nu^5+\nu^6)Cos((\nu-2)x)}{3072(\nu-1)^5(\nu+1)^3(\nu+2)(\nu-2)(\nu-3)} - \frac{(232-13\nu+47\nu^2+8\nu^3+8\nu^4+5\nu^5+\nu^6)Cos((\nu+2)x)}{3072(\nu+1)^5(\nu-1)^3(\nu-2)(\nu+2)(\nu+3)}$$

$$\tilde{C}_6(\nu, x) = \frac{Cos((\nu-12)x)}{2949120\,(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)(\nu-4)(\nu-5)(\nu-6)} + \frac{Cos((\nu+12)x)}{2949120\,(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)(\nu+4)(\nu+5)(\nu+6)} +$$

$$+ \frac{(16-7\nu+\nu^2)Cos((\nu-8)x)}{122880(\nu-1)^3(\nu+1)(\nu-2)(\nu-3)(\nu-4)(\nu-5)} - \frac{(16+7\nu+\nu^2)Cos((\nu+8)x)}{122880(\nu+1)^3(\nu-1)(\nu+2)(\nu+3)(\nu+4)(\nu+5)}$$

$$+ \frac{(19268-15344\nu+4739\nu^2-2938\nu^3+1945\nu^4-1180\nu^5+533\nu^6-122\nu^7+11\nu^8)Cos((\nu-4)x)}{196608(\nu-1)^5(\nu+1)^3(\nu+2)(\nu-2)^3(\nu-3)(\nu-4)}$$

$$+ \frac{(19268+15344\nu+4739\nu^2+2938\nu^3+1945\nu^4+1180\nu^5+533\nu^6+122\nu^7+11\nu^8)Cos((\nu+4)x)}{196608(\nu+1)^5(\nu-1)^3(\nu-2)(\nu+2)^3(\nu+3)(\nu+4)}$$

.

*Pour les ordres 7 et 8 il vient :*

$$\widetilde{C}_7(v,x)=\frac{Cos((v-14)x)}{82575360\,(v-1)(v-2)(v-3)(v-4)(v-5)(v-6)(v-7)}-\frac{Cos((v+14)x)}{82575360\,(v+1)(v+2)(v+3)(v+4)(v+5)(v+6)(v+7)}+$$

$$+\frac{(19-8v+v^2)Cos((v-10)x)}{2359296(v-1)^3(v+1)(v-2)(v-3)(v-4)(v-5)(v-6)}-\frac{(19+8v+v^2)Cos((v+10)x)}{2359296(v+1)^3(v-1)(v+2)(v+3)(v+4)(v+5)(v+6)}+$$

$$+\frac{(19788-14104v+3345v^2-2404v^3+1833v^4-1160v^5+467v^6-92v^7+7v^8)Cos((v-6)x)}{1310720(v-1)^5(v+1)^3(v+2)(v-2)^3(v-3)(v-4)(v-5)}-$$

$$-\frac{(19788+14104v+3345v^2+2404v^3+1833v^4+1160v^5+467v^6+92v^7+7v^8)Cos((v+6)x)}{1310720(v+1)^5(v-1)^3(v-2)(v+2)^3(v+3)(v+4)(v+5)}+$$

$$+\frac{(824244-481248v+749775v^2-778142v^3+320279v^4-117688v^5+41230v^6-5028v^7-534v^8-184v^9+355v^{10}-110v^{11}+11v^{12})Cos((v-2)x)}{786432(v-1)^7(v+1)^5(v+2)(v-2)^3(v-3)(v+3)(v-4)}-$$

$$-\frac{(824244+481248v+749775v^2+778142v^3+320279v^4+117688v^5+41230v^6+5028v^7-534v^8+184v^9+355v^{10}+110v^{11}+11v^{12})Cos((v+2)x)}{786432(v+1)^7(v-1)^5(v-2)(v+2)^3(v-3)(v+3)(v+4)}$$

$$\widetilde{C}_8(v,x)=\frac{Cos((v-16)x)}{2642411520(v-1)(v-2)(v-3)(v-4)(v-5)(v-6)(v-7)(v-8)}+\frac{Cos((v+16)x)}{2642411520(v+1)(v+2)(v+3)(v+4)(v+5)(v+6)(v+7)(v+8)}+$$

$$+\frac{(22-9v+v^2)Cos((v-12)x)}{55050240(v-1)^3(v+1)(v-2)(v-3)(v-4)(v-5)(v-6)(v-7)}+\frac{(22+9v+v^2)Cos((v+12)x)}{55050240(v+1)^3(v-1)(v+2)(v+3)(v+4)(v+5)(v+6)(v+7)}+$$

$$+\frac{(70616-46518v+8647v^2-7398v^3+6219v^4-4002v^5+1477v^6-258v^7+17v^8)Cos((v-8)x)}{47185920(v-1)^5(v+1)^3(v+2)(v-2)^3(v-3)(v-4)(v-5)(v-6)}+$$

$$+\frac{(70616+46518v+8647v^2+7398v^3+6219v^4+4002v^5+1477v^6+258v^7+17v^8)Cos((v+8)x)}{47185920(v+1)^5(v-1)^3(v-2)(v+2)^3(v+3)(v+4)(v+5)(v+6)}+$$

$$+\frac{(3361176-1300028v+2616438v^2-2503397v^3+835967v^4-334272v^5+98252v^6-7642v^7-978v^8-1612v^9+1126v^{10}-249v^{11}+19v^{12})Cos((v-4)x)}{7864320(v-1)^7(v+1)^5(v+2)(v-2)^3(v-3)(v+3)(v-4)(v-5)}+$$

$$+\frac{(3361176+1300028v+2616438v^2+2503397v^3+835967v^4+334272v^5+98252v^6+7642v^7-978v^8+1612v^9+1126v^{10}+249v^{11}+19v^{12})Cos((v+4)x)}{7864320(v+1)^7(v-1)^5(v-2)(v+2)^3(v-3)(v+3)(v+4)(v+5)}$$

*Le développement pour la fonction impaire est identique en substituant Sin à Cos. Il vient donc pour la fonction angulaire me, le développement en substituant la fonction Exponentielle, soit :*

$$\widetilde{me}_\nu(x) = e^{i\nu x} + \sum_{r=1}^{r=+\infty} q^r \widetilde{M}_r(\nu, x)$$

$$\widetilde{M}_1(\nu, x) = \frac{e^{i\nu x}}{4}\left\{\frac{e^{-2ix}}{\nu-1} - \frac{e^{+2ix}}{\nu+1}\right\} \quad \widetilde{M}_2(\nu, x) = \frac{e^{i\nu x}}{32}\left\{\frac{e^{-4ix}}{(\nu-1)(\nu-2)} + \frac{e^{4ix}}{(\nu+1)(\nu+2)}\right\}$$

$$\widetilde{M}_3(\nu, x) = e^{i\nu x}\left\{\frac{e^{-6ix}}{384(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)} - \frac{e^{6ix}}{384(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)} + \frac{(7-4\nu+\nu^2)e^{-2ix}}{128(\nu-1)^3(\nu-2)(\nu+1)} - \frac{(7+4\nu+\nu^2)e^{2ix}}{128(\nu+1)^3(\nu+2)(\nu-1)}\right\}$$

$$\widetilde{M}_4(\nu, x) = e^{i\nu x}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{e^{-8ix}}{6144(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)(\nu-4)} + \dfrac{e^{8ix}}{6144(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)(\nu+4)} + \\ + \dfrac{(10-5\nu+\nu^2)e^{-4ix}}{768(\nu-1)^3(\nu+1)(\nu-2)(\nu-3)} + \dfrac{(10+5\nu+\nu^2)e^{4ix}}{768(\nu+1)^3(\nu-1)(\nu+2)(\nu+3)}\end{array}\right\}$$

$$\widetilde{M}_5(\nu, x) = e^{i\nu x}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{e^{-10ix}}{122880(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)(\nu-4)(\nu-5)} - \dfrac{e^{10ix}}{122880(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)(\nu+4)(\nu+5)} + \\ + \dfrac{(13-6\nu+\nu^2)e^{-6ix}}{8192(\nu-1)^3(\nu+1)(\nu-2)(\nu-3)(\nu-4)} - \dfrac{(13+6\nu+\nu^2)e^{6ix}}{8192(\nu+1)^3(\nu-1)(\nu+2)(\nu+3)(\nu+4)} \\ + \dfrac{(232+13\nu+47\nu^2-8\nu^3+8\nu^4-5\nu^5+\nu^6)e^{-2ix}}{3072(\nu-1)^5(\nu+1)^3(\nu+2)(\nu-2)(\nu-3)} - \dfrac{(232-13\nu+47\nu^2+8\nu^3+8\nu^4+5\nu^5+\nu^6)e^{2ix}}{3072(\nu+1)^5(\nu-1)^3(\nu-2)(\nu+2)(\nu+3)}\end{array}\right\}$$

$$\widetilde{M}_6(\nu, x) = e^{i\nu x}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{e^{-12ix}}{2949120(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)(\nu-4)(\nu-5)(\nu-6)} + \dfrac{e^{12ix}}{2949120(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)(\nu+4)(\nu+5)(\nu+6)} + \\ + \dfrac{(16-7\nu+\nu^2)e^{-8ix}}{122880(\nu-1)^3(\nu+1)(\nu-2)(\nu-3)(\nu-4)(\nu-5)} - \dfrac{(16+7\nu+\nu^2)e^{8ix}}{122880(\nu+1)^3(\nu-1)(\nu+2)(\nu+3)(\nu+4)(\nu+5)} \\ + \dfrac{(19268-15344\nu+4739\nu^2-2938\nu^3+1945\nu^4-1180\nu^5+533\nu^6-122\nu^7+11\nu^8)e^{-4ix}}{196608(\nu-1)^5(\nu+1)^3(\nu+2)(\nu-2)^3(\nu-3)(\nu-4)} + \\ + \dfrac{(19268+15344\nu+4739\nu^2+2938\nu^3+1945\nu^4+1180\nu^5+533\nu^6+122\nu^7+11\nu^8)e^{4ix}}{196608(\nu+1)^5(\nu-1)^3(\nu-2)(\nu+2)^3(\nu+3)(\nu+4)}\end{array}\right\}.$$

*Pour les ordres 7 et 8 il vient :*

$$\widetilde{M}_7(\nu,x)=e^{i\nu x}\left\{\begin{array}{l}
\dfrac{e^{-14ix}}{82575360\,(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)(\nu-4)(\nu-5)(\nu-6)(\nu-7)}-\dfrac{e^{14ix}}{82575360\,(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)(\nu+4)(\nu+5)(\nu+6)(\nu+7)}+\\
+\dfrac{\left(19-8\nu+\nu^2\right)e^{-10ix}}{2359296(\nu-1)^3(\nu+1)(\nu-2)(\nu-3)(\nu-4)(\nu-5)(\nu-6)}-\dfrac{\left(19+8\nu+\nu^2\right)e^{-10ix}}{2359296(\nu+1)^3(\nu-1)(\nu+2)(\nu+3)(\nu+4)(\nu+5)(\nu+6)}+\\
+\dfrac{\left(19788-14104\nu+3345\nu^2-2404\nu^3+1833\nu^4-1160\nu^5+467\nu^6-92\nu^7+7\nu^8\right)e^{-6ix}}{1310720(\nu-1)^5(\nu+1)^3(\nu+2)(\nu-2)^3(\nu-3)(\nu-4)(\nu-5)}-\\
-\dfrac{\left(19788+14104\nu+3345\nu^2+2404\nu^3+1833\nu^4+1160\nu^5+467\nu^6+92\nu^7+7\nu^8\right)e^{6ix}}{1310720(\nu+1)^5(\nu-1)^3(\nu-2)(\nu+2)^3(\nu+3)(\nu+4)(\nu+5)}+\\
+\dfrac{\left(824244-481248\nu+749775\nu^2-778142\nu^3+320279\nu^4-117688\nu^5+41230\nu^6-5028\nu^7-534\nu^8-184\nu^9+355\nu^{10}-110\nu^{11}+11\nu^{12}\right)e^{-2ix}}{786432(\nu-1)^7(\nu+1)^5(\nu+2)(\nu-2)^3(\nu-3)(\nu+3)(\nu-4)}-\\
-\dfrac{\left(824244+481248\nu+749775\nu^2+778142\nu^3+320279\nu^4+117688\nu^5+41230\nu^6+5028\nu^7-534\nu^8+184\nu^9+355\nu^{10}+110\nu^{11}+11\nu^{12}\right)e^{2ix}}{786432(\nu+1)^7(\nu-1)^5(\nu-2)(\nu+2)^3(\nu-3)(\nu+3)(\nu+4)}
\end{array}\right\}$$

$$\widetilde{M}_8(\nu,x)=e^{i\nu x}\left\{\begin{array}{l}
\dfrac{e^{-16ix}}{2642411520(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)(\nu-4)(\nu-5)(\nu-6)(\nu-7)(\nu-8)}+\dfrac{e^{16ix}}{2642411520(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)(\nu+4)(\nu+5)(\nu+6)(\nu+7)(\nu+8)}+\\
+\dfrac{\left(22-9\nu+\nu^2\right)e^{-12ix}}{55050240(\nu-1)^3(\nu+1)(\nu-2)(\nu-3)(\nu-4)(\nu-5)(\nu-6)(\nu-7)}+\dfrac{\left(22+9\nu+\nu^2\right)e^{12ix}}{55050240(\nu+1)^3(\nu-1)(\nu+2)(\nu+3)(\nu+4)(\nu+5)(\nu+6)(\nu+7)}+\\
+\dfrac{\left(70616-46518\nu+8647\nu^2-7398\nu^3+6219\nu^4-4002\nu^5+1477\nu^6-258\nu^7+17\nu^8\right)e^{-8ix}}{47185920(\nu-1)^5(\nu+1)^3(\nu+2)(\nu-2)^3(\nu-3)(\nu-4)(\nu-5)(\nu-6)}+\\
+\dfrac{\left(70616+46518\nu+8647\nu^2+7398\nu^3+6219\nu^4+4002\nu^5+1477\nu^6+258\nu^7+17\nu^8\right)e^{8ix}}{47185920(\nu+1)^5(\nu-1)^3(\nu-2)(\nu+2)^3(\nu+3)(\nu+4)(\nu+5)(\nu+6)}+\\
+\dfrac{\left(3361176-1300028\nu+2616438\nu^2-2503397\nu^3+835967\nu^4-334272\nu^5+98252\nu^6-7642\nu^7-978\nu^8-1612\nu^9+1126\nu^{10}-249\nu^{11}+19\nu^{12}\right)e^{-4ix}}{7864320(\nu-1)^7(\nu+1)^5(\nu+2)(\nu-2)^3(\nu-3)(\nu+3)(\nu-4)(\nu-5)}+\\
+\dfrac{\left(3361176+1300028\nu+2616438\nu^2+2503397\nu^3+835967\nu^4+334272\nu^5+98252\nu^6+7642\nu^7-978\nu^8+1612\nu^9+1126\nu^{10}+249\nu^{11}+19\nu^{12}\right)e^{4ix}}{7864320(\nu+1)^7(\nu-1)^5(\nu-2)(\nu+2)^3(\nu-3)(\nu+3)(\nu+4)(\nu+5)}
\end{array}\right\}$$

*La normalisation utilisée pour toutes ces fonctions consiste à fixer à 1 le coefficient du développement à l'ordre 0 en q, soit typiquement Cos(vx) , Sin(vx) ou Exp(ivx ). La normalisation usuelle va au delà, en l'occurrence pour la fonction me, elle est fixé communément par:*

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} dx\, me_\nu(x,q)\, me_\nu(-x,q)=1$$

*Il est alors « facile » de calculer la norme au carré du développement à l'ordre 8 avec Mathematica par exemple, car il suffit de réaliser le carré de l'expression, et d'écarter tout les termes exponentiels résiduels Exp[ipx] avec p entier pair, car l'intégration donne automatiquement 0.Les autres termes sont constant dans l'intégration et doivent être multiplié simplement par π. Il en résulte une expression relativement simple de la norme au carré en se limitant à l'ordre 8 car les ordre q supérieur à 8 ne contribue dans la correction de normalisation qu'à un ordre également supérieur à 8.*

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} dx\,\widetilde{me}_\nu(x,q)\widetilde{me}_\nu(-x,q) = 1 + q^2\frac{1+\nu^2}{(\nu-1)^2(\nu+1)^2} + q^4\frac{-220-531\nu^2+191\nu^4-21\nu^6+5\nu^8}{512(\nu-1)^4(\nu+1)^4(\nu-2)^2(\nu+2)^2}$$
$$+q^6\frac{365652+1541045\nu^2-175056\nu^4-64107\nu^6-12724\nu^8+4479\nu^{10}-432\nu^{12}+23\nu^{14}}{36864(\nu-1)^6(\nu+1)^6(\nu-2)^2(\nu+2)^2(\nu-3)^2(\nu+3)^2}$$
$$+q^8\frac{\left\{\begin{array}{l}-247147969536-1390788946624\nu^2+135694944624\nu^4+421424732428\nu^6-127015780659\nu^8+\\+697304592\nu^{10}+3806322612\nu^{12}-710074632\nu^{14}+102071574\nu^{16}-12229584\nu^{18}+913108\nu^{20}-37380\nu^{22}+677\nu^{24}\end{array}\right\}}{18874368(\nu-1)^8(\nu+1)^8(\nu-2)^2(\nu+2)^2(\nu-3)^2(\nu+3)^2(\nu-4)^2(\nu+4)^2}$$

*Il « suffit » donc de former le développement limité des expressions :*

$$me_\nu(x,q) = \frac{\widetilde{me}_\nu(x,q)}{\sqrt{\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} dx\,\widetilde{me}_\nu(x,q)\widetilde{me}_\nu(-x,q)}} \quad ce_\nu(x,q) = \frac{\widetilde{c}e_\nu(x,q)}{\sqrt{\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} dx\,\widetilde{me}_\nu(x,q)\widetilde{me}_\nu(-x,q)}} \quad se_\nu(x,q) = \frac{\widetilde{s}e_\nu(x,q)}{\sqrt{\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} dx\,\widetilde{me}_\nu(x,q)\widetilde{me}_\nu(-x,q)}}$$

*Cela donne pour la fonction Ce pour les ordres 0 à 6 :*

$$ce_\nu(x) = Cos(\nu\, x) + \sum_{r=1}^{r=+\infty} q^r C_r(\nu, x)$$

$$C_1(\nu,x) = \frac{1}{4}\left\{\frac{Cos((\nu-2)x)}{\nu-1} - \frac{Cos((\nu+2)x)}{\nu+1}\right\} \quad C_2(\nu,x) = \frac{1}{32}\left\{\frac{Cos((\nu-4)x)}{(\nu-1)(\nu-2)} + \frac{Cos((\nu+4)x)}{(\nu+1)(\nu+2)} - 2\frac{(\nu^2+1)Cos(\nu\, x)}{(\nu+1)^2(\nu-1)^2}\right\}$$

$$C_3(\nu,x) = \frac{Cos((\nu-6)x)}{384(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)} - \frac{Cos((\nu+6)x)}{384(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)} + \frac{(11+\nu+\nu^2-\nu^3)Cos((\nu-2)x)}{128(\nu-1)^3(\nu+1)^2(\nu-2)} + \frac{(11-\nu+\nu^2+\nu^3)Cos((\nu+2)x)}{128(\nu+1)^3(\nu-1)^2(\nu+2)}$$

$$C_4(\nu,x) = \frac{Cos((\nu-8)x)}{6144(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)(\nu-4)} + \frac{Cos((\nu+8)x)}{6144(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)(\nu+4)} +$$

$$+\frac{(29+7\nu+\nu^2-\nu^3)Cos((\nu-4)x)}{1536(\nu-1)^3(\nu+1)^2(\nu-2)(\nu-3)} - \frac{(29-7\nu+\nu^2+\nu^3)Cos((\nu+4)x)}{1536(\nu+1)^3(\nu-1)^2(\nu+2)(\nu+3)} + \frac{(316+675\nu^2-185\nu^4-15\nu^6+\nu^8)Cos(\nu\, x)}{1024(\nu+1)^4(\nu-1)^4(\nu+2)^2(\nu-2)^2}$$

$$C_5(\nu,x) = \frac{Cos((\nu-10)x)}{122880(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)(\nu-4)(\nu-5)} - \frac{Cos((\nu+10)x)}{122880(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)(\nu+4)(\nu+5)} +$$

$$+\frac{(55+17\nu+\nu^2-\nu^3)Cos((\nu-6)x)}{24576(\nu-1)^3(\nu+1)^2(\nu-2)(\nu-3)(\nu-4)} + \frac{(55-17\nu+\nu^2+\nu^3)Cos((\nu+6)x)}{24576(\nu+1)^3(\nu-1)^2(\nu+2)(\nu+3)(\nu+4)} -$$

$$-\frac{(7564+3572\nu+6335\nu^2-1931\nu^3-2457\nu^4+273\nu^5+5\nu^6+31\nu^7+\nu^8-\nu^9)Cos((\nu-2)x)}{12288(\nu-1)^5(\nu+1)^4(\nu+2)^2(\nu-2)^2(\nu-3)} -$$

$$-\frac{(7564-3572\nu+6335\nu^2+1931\nu^3-2457\nu^4-273\nu^5+5\nu^6-31\nu^7+\nu^8+\nu^9)Cos((\nu+2)x)}{12288\,(\nu+1)^5(\nu-1)^4(\nu-2)^2(\nu+2)^2(\nu+3)}$$

$$C_6(\nu,x) = \frac{Cos((\nu-12)x)}{2949120\,(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)(\nu-4)(\nu-5)(\nu-6)} + \frac{Cos((\nu+12)x)}{2949120\,(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)(\nu+4)(\nu+5)(\nu+6)} +$$

$$+\frac{(89+31\nu+\nu^2-\nu^3)Cos((\nu-8)x)}{491520(\nu-1)^3(\nu+1)^2(\nu-2)(\nu-3)(\nu-4)(\nu-5)} -$$

$$-\frac{(89-31\nu+\nu^2+\nu^3)Cos((\nu+8)x)}{491520(\nu+1)^3(\nu-1)^2(\nu+2)(\nu+3)(\nu+4)(\nu+5)}$$

$$+\frac{(71528+16404\nu+32954\nu^2-32025\nu^3-16879\nu^4+8211\nu^5+145\nu^6+69\nu^7-53\nu^8-3\nu^9+\nu^{10})Cos((\nu-4)x)}{196608(\nu-1)^5(\nu+1)^4(\nu+2)^2(\nu-2)^3(\nu-3)(\nu-4)}$$

$$+\frac{(71528-16404\nu+32954\nu^2+32025\nu^3-16879\nu^4-8211\nu^5+145\nu^6-69\nu^7-53\nu^8+3\nu^9+\nu^{10})Cos((\nu+4)x)}{196608(\nu+1)^5(\nu-1)^4(\nu-2)^2(\nu+2)^3(\nu+3)(\nu+4)}$$

$$+\frac{(1329084+4883287\,?2+153312\,?4-718317\,?6+75244\,?8+597\,?10-72\,?12+?14)Cos(\nu\, x)}{147456(\nu+1)^6(\nu-1)^6(\nu-2)^4(\nu+2)^4(\nu-3)^2(\nu+3)^2}$$

*pour les ordres 7 et 8 :*

$$C_7(\nu,x)=\frac{Cos((\nu-14)x)}{82575360\,(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)(\nu-4)(\nu-5)(\nu-6)(\nu-7)}-\frac{Cos((\nu+14)x)}{82575360\,(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)(\nu+4)(\nu+5)(\nu+6)(\nu+7)}+$$

$$+\frac{\left(131+49\nu+\nu^2-\nu^3\right)Cos((\nu-10)x)}{11796480\,(\nu-1)^3(\nu+1)^2(\nu-2)(\nu-3)(\nu-4)(\nu-5)(\nu-6)}+\frac{\left(131-49\nu+\nu^2+\nu^3\right)Cos((\nu+10)x)}{11796480\,(\nu+1)^3(\nu-1)^2(\nu+2)(\nu+3)(\nu+4)(\nu+5)(\nu+6)}+$$

$$+\frac{\left(213128+75588\nu+90898\nu^2-77301\nu^3-52663\nu^4+16755\nu^5+1441\nu^6+81\nu^7-85\nu^8-3\nu^9+\nu^{10}\right)Cos((\nu-6)x)}{3932160(\nu-1)^5(\nu+1)^4(\nu+2)^2(\nu-2)^3(\nu-3)(\nu-4)(\nu-5)}-$$

$$-\frac{\left(213128-75588\nu+90898\nu^2+77301\nu^3-52663\nu^4-16755\nu^5+1441\nu^6-81\nu^7-85\nu^8+3\nu^9+\nu^{10}\right)Cos((\nu+6)x)}{3932160(\nu+1)^5(\nu-1)^4(\nu-2)^2(\nu+2)^3(\nu+3)(\nu+4)(\nu+5)}-$$

$$-\frac{\begin{pmatrix}109561752+17333676\nu+201375038\nu^2-104735595\nu^3-36547715\nu^4-4187610\nu^5-9693084\nu^6+\\+14538771\nu^7-106369\nu^8-1584192\nu^9+164782\nu^{10}+3771\nu^{11}+2955\nu^{12}+270\nu^{13}-112\nu^{14}-3\nu^{15}+\nu^{16}\end{pmatrix}Cos((\nu-2)x)}{2359296(\nu-1)^7(\nu+1)^6(\nu+2)^2(\nu-2)^3(\nu-3)^2(\nu+3)^2(\nu-4)}+$$

$$+\frac{\begin{pmatrix}109561752-17333676\nu+201375038\nu^2+104735595\nu^3-36547715\nu^4+4187610\nu^5-9693084\nu^6-\\-14538771\nu^7-106369\nu^8+1584192\nu^9+164782\nu^{10}-3771\nu^{11}+2955\nu^{12}-270\nu^{13}-112\nu^{14}+3\nu^{15}+\nu^{16}\end{pmatrix}Cos((\nu+2)x)}{2359296(\nu+1)^7(\nu-1)^6(\nu-2)^2(\nu+2)^3(\nu-3)^2(\nu+3)^2(\nu+4)}$$

$$C_8(\nu,x)=\frac{Cos((\nu-16)x)}{2642411520(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)(\nu-4)(\nu-5)(\nu-6)(\nu-7)(\nu-8)}+\frac{Cos((\nu+16)x)}{2642411520(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)(\nu+4)(\nu+5)(\nu+6)(\nu+7)(\nu+8)}+$$

$$+\frac{\left(181+71\nu+\nu^2-\nu^3\right)Cos((\nu-12)x)}{330301440(\nu-1)^3(\nu+1)^2(\nu-2)(\nu-3)(\nu-4)(\nu-5)(\nu-6)(\nu-7)}-\frac{\left(181-71\nu+\nu^2+\nu^3\right)Cos((\nu+12)x)}{330301440(\nu+1)^3(\nu-1)^2(\nu+2)(\nu+3)(\nu+4)(\nu+5)(\nu+6)(\nu+7)}+$$

$$+\frac{\left(498392+214668\nu+207506\nu^2-158313\nu^3-125647\nu^4+28875\nu^5+4153\nu^6+93\nu^7-125\nu^8-3\nu^9+\nu^{10}\right)Cos((\nu-8)x)}{94371840\,(\nu-1)^5(\nu+1)^4(\nu+2)^2(\nu-2)^3(\nu-3)(\nu-4)(\nu-5)(\nu-6)}+$$

$$+\frac{\left(498392-214668\nu+207506\nu^2+158313\nu^3-125647\nu^4-28875\nu^5+4153\nu^6-93\nu^7-125\nu^8+3\nu^9+\nu^{10}\right)Cos((\nu+8)x)}{94371840\,(\nu+1)^5(\nu-1)^4(\nu-2)^2(\nu+2)^3(\nu+3)(\nu+4)(\nu+5)(\nu+6)}-$$

$$-\frac{\begin{pmatrix}809243208+389051748\nu+1389727610\nu^2-274475889\nu^3-356722289\nu^4-94695132\nu^5-61778226\nu^6+\\+57763575\nu^7+8458115\nu^8-5498700\nu^9+165022\nu^{10}+15357\nu^{11}+8805\nu^{12}+324\nu^{13}-166\nu^{14}-3\nu^{15}+\nu^{16}\end{pmatrix}Cos((\nu-4)x)}{47185920(\nu-1)^7(\nu+1)^6(\nu+2)^2(\nu-2)^3(\nu-3)^2(\nu+3)^2(\nu-4)(\nu-5)}-$$

$$-\frac{\begin{pmatrix}809243208-389051748\nu+1389727610\nu^2+274475889\nu^3-356722289\nu^4+94695132\nu^5-61778226\nu^6-\\-57763575\nu^7+8458115\nu^8+5498700\nu^9+165022\nu^{10}-15357\nu^{11}+8805\nu^{12}-324\nu^{13}-166\nu^{14}+3\nu^{15}+\nu^{16}\end{pmatrix}Cos((\nu+4)x)}{47185920(\nu+1)^7(\nu-1)^6(\nu-2)^2(\nu+2)^3(\nu-3)^2(\nu+3)^2(\nu+4)(\nu+5)}$$

$$+\frac{\begin{pmatrix}537330981888+2610096254656\nu^2+221208365040\nu^4-1231553992348\nu^6+342877165161\nu^8+7968932784\nu^{10}-\\-13022857500\nu^{12}+1581259368\nu^{14}-60475842\nu^{16}+182544\nu^{18}+14852\nu^{20}-204\nu^{22}+\nu^{24}\end{pmatrix}Cos(\nu\,x)}{37748736(\nu+1)^8(\nu-1)^8(\nu-2)^4(\nu+2)^4(\nu-3)^2(\nu+3)^2(\nu-4)^2(\nu+4)^2}$$

*Pour la fonction se on remplace Cos par Sin, et pour la fonction me, Cos par Exp[i*argument]. De même le développement pour les fonctions radiales résulte de la substitution de Cos par Cosh pour Je, de Cos par Sinh pour Jo et de Cos par Exp[argument] pour Me.*

***Développement limité des solutions angulaires d'ordre non-entier de l'équation de Mathieu dans le cas d'un ordre non-entier v très grand par rapport à q***

*Les deux auteurs de l'un des ouvrages de référence « Mathieusche Funktionen und Sphaeroid funktionen » sur les fonctions de Mathieu, J.Meixner et F.W.Shafke donnent également une formule simple de développement asymptotique des fonctions de Mathieu lorsque l'ordre v est grand, grand également par rapport à q, défini positif (point 2.26 page 125) et dont la partie entière est un nombre paire :*

$$h=\sqrt{|q|}\quad me_{\nu+2r}\left(x,h^2\right)\approx e^{i(\nu+2r)x}\left(1-\frac{ih^2}{\nu+2r}Sin(2x)+\frac{1}{(\nu+2r)^2}\left\{\frac{h^4}{16}\left(Cos(4x)-1\right)+\frac{h^2}{2}Cos(2x)\right\}\right)+O\left(\frac{1}{r^3}\right)$$

*Cette expression approchée n'étant pas normée comme à l'habitude, il convient de revenir à la normalisation classique, ce qui donne :*

$$\int_0^{\pi}dx\, me_n\left(x,h^2\right)me_n\left(-x,h^2\right)\approx\pi\left(1+\frac{h^4}{8n^4}+\frac{3h^8}{512n^4}\right)\qquad h=\sqrt{|q|}$$

$$me_{\nu+2r}\left(x,h^2\right)\approx\frac{e^{i(\nu+2r)x}}{\sqrt{1+\frac{h^4}{8n^4}+\frac{3h^8}{512n^4}}}\left(1-\frac{ih^2}{\nu+2r}Sin(2x)+\frac{1}{(\nu+2r)^2}\left\{\frac{h^4}{16}\left(Cos(4x)-1\right)+\frac{h^2}{2}Cos(2x)\right\}\right)$$

*Les nombres caractéristiques a et b ont également une expression asymptotique particulièrement simple :* $\lambda_{\nu+2r}\left(h^2\right)\approx(\nu+2r)^2+\frac{h^4}{2\left((\nu+2r)^2-1\right)}+O\left(r^{-6}\right).$

*Pour ce qui est des fonctions angulaires ce et se, construite sous la forme :*

$$ce_\nu\left(x,h^2\right)=\frac{me_\nu\left(x,h^2\right)+me_\nu\left(-x,h^2\right)}{2}\qquad se_\nu(z,q)=\frac{me_\nu\left(x,h^2\right)-me_\nu\left(-x,h^2\right)}{2i}$$

*Il vient :*

$$ce_{\nu+2r}\left(x,h^2\right)\approx\frac{\left\{Cos((\nu+2r)x)\left(1+\frac{1}{(\nu+2r)^2}\left\{\frac{h^4}{16}\left(Cos(4x)-1\right)+\frac{h^2}{2}Cos(2x)\right\}\right)+\frac{h^2}{\nu+2r}Sin(2x)Sin((\nu+2r)x)\right\}}{\sqrt{1+\frac{h^4}{8n^4}+\frac{3h^8}{512n^4}}}$$

$$se_{\nu+2r}\left(x,h^2\right)\approx\frac{\left\{Sin((\nu+2r)x)\left(1+\frac{1}{(\nu+2r)^2}\left\{\frac{h^4}{16}\left(Cos(4x)-1\right)+\frac{h^2}{2}Cos(2x)\right\}\right)-\frac{h^2}{\nu+2r}Sin(2x)Cos((\nu+2r)x)\right\}}{\sqrt{1+\frac{h^4}{8n^4}+\frac{3h^8}{512n^4}}}$$

*En ce qui concerne les fonctions radiales, par la formule de connexion avec la fonction angulaire me, il vient :*

$$h=\sqrt{|q|}\quad Me_{\nu+2r}\left(x,h^2\right)=me_{\nu+2r}\left(-ix,h^2\right)\Rightarrow$$

$$Me_{\nu+2r}\left(x,h^2\right)\approx\frac{e^{x(\nu+2r)}}{\sqrt{1+\frac{h^4}{8n^4}+\frac{3h^8}{512n^4}}}\left(1-\frac{h^2}{\nu+2r}Sinh(2x)+\frac{1}{(\nu+2r)^2}\left\{\frac{h^4}{16}\left(Cosh(4x)-1\right)+\frac{h^2}{2}Cosh(2x)\right\}\right)+O\left(\frac{1}{r^3}\right)$$

*Lorsque le paramètre q change de signe, nous savons que :*

$$\begin{cases} me_\nu(z,-q) = e^{\frac{i\nu\pi}{2}} me_\nu\left(z-\frac{\pi}{2},q\right) \qquad me_\nu(-z,-q) = e^{\frac{i\nu\pi}{2}} me_\nu\left(-z-\frac{\pi}{2},q\right) \\ ce_\nu(z,-q) = e^{\frac{i\nu\pi}{2}} \dfrac{me_\nu\left(z-\frac{\pi}{2},q\right)+me_\nu\left(-z-\frac{\pi}{2},q\right)}{2} \\ se_\nu(z,-q) = e^{\frac{i\nu\pi}{2}} \dfrac{me_\nu\left(z-\frac{\pi}{2},q\right)-me_\nu\left(-z-\frac{\pi}{2},q\right)}{2i} \end{cases}$$

*Il vient donc :*

$$me_{\nu+2r}\left(x,-h^2\right) \approx \frac{e^{i(\nu+2r)x}}{\sqrt{1+\frac{h^4}{8n^4}+\frac{3h^8}{512n^4}}}\left(1+\frac{ih^2}{\nu+2r}Sin(2x)+\frac{1}{(\nu+2r)^2}\left\{\frac{h^4}{16}(Cos(4x)-1)-\frac{h^2}{2}Cos(2x)\right\}\right)$$

$$ce_{\nu+2r}\left(x,-h^2\right) \approx \frac{\left\{Cos((\nu+2r)x)\left(1+\frac{1}{(\nu+2r)^2}\left\{\frac{h^4}{16}(Cos(4x)-1)-\frac{h^2}{2}Cos(2x)\right\}\right)-\frac{h^2}{\nu+2r}Sin(2x)Sin((\nu+2r)x)\right\}}{\sqrt{1+\frac{h^4}{8n^4}+\frac{3h^8}{512n^4}}}$$

$$se_{\nu+2r}\left(x,-h^2\right) \approx \frac{\left\{Sin((\nu+2r)x)\left(1+\frac{1}{(\nu+2r)^2}\left\{\frac{h^4}{16}(Cos(4x)-1)-\frac{h^2}{2}Cos(2x)\right\}\right)+\frac{h^2}{\nu+2r}Sin(2x)Cos((\nu+2r)x)\right\}}{\sqrt{1+\frac{h^4}{8n^4}+\frac{3h^8}{512n^4}}}$$

***Dégénérescence de l'ellipse en cercle et formes des solutions radiales et angulaires à trois dimensions***

*Lorsque l'excentricité de l'ellipse e correspondant à la section du domaine limite tend vers 0 alors l'ellipse devient un cercle et l'on est censé passer d'un système de coordonnées elliptiques cylindrique en un système polaire cylindrique :*

$$Excentricité\ de\ l'ellipse \quad (\eta = l_\eta) \quad e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \quad c = \sqrt{a^2 - b^2} \Rightarrow c = a\, e$$

$$\Rightarrow Tanh(l_\eta) = \sqrt{1-e^2} \quad Cosh(l_\eta) = \frac{1}{e} \quad Sinh(l_\eta) = \frac{\sqrt{1-e^2}}{e}$$

$$Si \quad e \to 1 \Rightarrow l_\eta \to 0 \quad et\ c = a \quad l'ellipse\ dégénère\ en\ le\ segment\ interfocal$$

*Lorsque e->0 et a constant alors $l_\eta$->+∞ et c->0 et l'ellipse dégénère en un cercle de rayon a.*
*et les produits tendent également vers le rayon du cercle :* $c\, Cosh(l_\eta) \to a \quad et \quad c\, Sinh(l_\eta) \to a$. *Si par contre le facteur d'échelle c est constant lorsque a->+∞, e->0 et là encore l'ellipse dégénère en un cercle.*

*Dans le même passage à la limite du cercle, les hyperboles définies par les équations :*

$$\left.\begin{array}{l} x = c\, Cosh(l_\eta)\, Cos(\vartheta) \\ y = c\, Sinh(l_\eta)\, Sin(\vartheta) \end{array}\right\} \Rightarrow Hyperboles \quad \left(\frac{x}{Cos(\vartheta)}\right)^2 - \left(\frac{y}{Sin(\vartheta)}\right)^2 = c^2$$

$$c \to 0 \Rightarrow \frac{y}{x} \to \pm Tan(\vartheta)$$

*deviennent des rayons du cercle si l'on considère que l'angle dans le système elliptique devient l'angle dans le système polaire.*

*Ces relations permettent de caractériser le passage du système de coordonnées elliptique en polaire, lorsque l'excentricité de toutes les ellipses tendent vers 0:*

$$\left.\begin{array}{l} Système\ elliptique \\ \left\{\begin{array}{l} x = c\, Cosh(\eta)\, Cos(\vartheta) \\ y = c\, Sinh(\eta)\, Sin(\vartheta) \end{array}\right. \end{array}\right\} \underset{e\to 0}{\Rightarrow} \left\{\begin{array}{l} Système\ Polaire \\ \left\{\begin{array}{l} x = r\, Cos(\varphi) \\ y = r\, Sin(\varphi) \end{array}\right. \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{l} c \to 0 \\ \eta \to +\infty \\ c\, Cosh(\eta) \to r \\ c\, Sinh(\eta) \to r \\ \vartheta \to \varphi \end{array}$$

*Pour ce qui est des variables de séparation introduites dans l'équation de Laplace en coordonnées elliptique, nous avons par exemple, pour le cas $\alpha_3<0$ :*

$$\alpha_3 < 0 \Rightarrow q = |q| = \frac{|\alpha_3| c^2}{4} \Rightarrow |\alpha_3| = \frac{4|q|}{c^2} \quad et \quad \lambda = \alpha_2 - \frac{|\alpha_3| c^2}{2}$$
$$\Theta''(\theta) + (\lambda - 2|q|\, Cos(2\theta))\Theta(\theta) = 0 \quad \textit{équation de Mathieu}$$
$$\Theta(\theta) = A_\theta\ ce_n(\theta,|q|) + B_\theta\ fe_n(\theta,|q|) \quad ou\ \Theta(\theta) = A_\theta\ se_n(\theta,|q|) + B_\theta\ ge_n(\theta,|q|)$$
$$R''(\eta) - (\lambda - 2|q|\, Cosh(2\eta))R(\eta) = 0 \quad \textit{équation de Mathieu modifiée } \theta \to i\,\eta$$
$$R(\eta) = C_\eta\ Je_n(\eta,|q|) + D_\eta\ Ne_n(\eta,|q|) \quad ou\ R(\eta) = C_\eta\ Jo_n(\eta,|q|) + D_\eta\ No_n(\eta,|q|)$$

*Dans ces conditions lorsque c->0 alors q->0 et nous avons également λ->n. Et pour les fonctions angulaires, dans les développements de Fourier, la plupart des termes s'annulent :*

$$ce_{2n}(\vartheta,q) = \sum_{l=0}^{l=\infty} A_{2l}^{(2n)} Cos(2l\,\vartheta) \Rightarrow A_{2l}^{(2n)} \to \delta_{n,l} A_{2n}^{(2n)} \quad et \quad A_{2n}^{(2n)} \to 1$$
$$ce_{2n+1}(\vartheta,q) = \sum_{l=0}^{l=\infty} A_{2l+1}^{(2n+1)} Cos((2l+1)\vartheta) \Rightarrow A_{2l+1}^{(2n+1)} \to \delta_{n,l} A_{2n+1}^{(2n+1)} \quad et \quad A_{2n+1}^{(2n+1)} \to 1$$
$$se_{2n+1}(\vartheta,q) = \sum_{l=0}^{l=\infty} B_{2l+1}^{(2n+1)} Sin((2l+1)\vartheta) \Rightarrow B_{2l+1}^{(2n+1)} \to \delta_{n,l} B_{2n+1}^{(2n+1)} \quad et \quad B_{2n+1}^{(2n+1)} \to 1$$
$$se_{2n+2}(\vartheta,q) = \sum_{l=0}^{l=\infty} B_{2l+2}^{(2n+2)} Sin((2l+2)\vartheta) \Rightarrow B_{2l+2}^{(2n+2)} \to \delta_{n,l} B_{2n+2}^{(2n+2)} \quad et \quad B_{2n+2}^{(2n+2)} \to 1$$

*C'est un résultat qui est donné sans démonstration, mais pour s'en convaincre, on peut donner quelques développements en fonction des puissances du paramètre q pour les premières fonctions de Mathieu :*

$$ce_0(\vartheta,q) \approx 1 + \sum_{l=1}^{l=\infty}\left(\frac{2^{l+1} q^l}{(l!)^2} + O(q^{l+2})\right) Cos(2l\,\vartheta)1$$
$$ce_1(\vartheta,q) = Cos(\vartheta) + \sum_{l=1}^{l=\infty}\left(\frac{2^l q^l}{(l+1)!\,l!} + O(q^{l+1})\right) Cos((2l+1)\vartheta)$$
$$ce_2(\vartheta,q) = -2q + O(q^2) + Cos(2\vartheta) + \sum_{l=1}^{l=\infty}\left(\frac{2^{l+1} q^l}{(l+2)!\,l!} + O(q^{l+1})\right) Cos((2l+2)\vartheta)$$
$$se_1(\vartheta,q) = Sin(\vartheta) + \sum_{l=1}^{l=\infty}\left(\frac{2^l q^l}{(l+1)!\,l!} + O(q^{l+1})\right) Sin((2l+1)\vartheta)$$

*Il s'en suit que les fonctions angulaires premières solutions et secondes solutions tendent vers les fonctions sinusoïdales correspondantes :*

$$\begin{cases} ce_{2n}(\vartheta,q) \to \dfrac{Cos(2n\,\vartheta)}{\sqrt{1+\partial_{n,0}}} \\ ce_{2n+1}(\vartheta,q) \to Cos((2n+1)\vartheta) \\ se_{2n+1}(\vartheta,q) \to Sin((2n+1)\vartheta) \\ se_{2n+2}(\vartheta,q) \to Sin((2n+2)\vartheta) \end{cases} \qquad \begin{cases} fe_{2n}(\vartheta,q) \to Sin(2n\,\vartheta) \\ fe_{2n+1}(\vartheta,q) \to Sin((2n+1)\vartheta) \\ ge_{2n+1}(\vartheta,q) \to Cos((2n+1)\vartheta) \\ ge_{2n+2}(\vartheta,q) \to Cos((2n+2)\vartheta) \end{cases}$$

*Pour ce qui est des fonctions de Mathieu radiales, revenons à l'équation différentielle séparée dans le cas de la variable de séparation négative (problème aux limites homogène dans la dimension radiale) :*

$$\alpha_3 < 0 \Rightarrow q = |q| = \frac{|\alpha_3| c^2}{4} \Rightarrow |\alpha_3| = \frac{4|q|}{c^2} \quad et \quad \lambda = \alpha_2 - \frac{|\alpha_3| c^2}{2}$$

$$R''(\eta) - (\lambda - 2|q|\, Cosh(2\eta))R(\eta) = 0$$

$$Comme \quad \eta \to +\infty \quad et \quad c \to 0 \quad et \quad c\, Cosh(\eta) \to r \quad et \quad c\, Cosh(l_\eta) \to l_r \Leftrightarrow \frac{ce^\eta}{2} \to r \Leftrightarrow \frac{c^2 e^{2\eta}}{4} \to r^2$$

$$r = \frac{ce^\eta}{2} \Rightarrow dr = \frac{ce^\eta}{2} d\eta = r d\eta \Rightarrow \frac{dr}{d\eta} = r \Rightarrow R'(\eta) = \frac{dR(\eta)}{d\eta} = \frac{dR(\eta)}{dr}\frac{dr}{d\eta} = \frac{dR(\eta)}{dr} r$$

$$R''(\eta) = \frac{d^2R(\eta)}{dr^2} r^2 + \frac{dR(\eta)}{dr} r \Rightarrow 2|q|\, Cosh(2\eta) \approx |q|\, e^{2\eta} \approx \frac{|\alpha_3| c^2}{4}\frac{4}{c^2} r^2 \approx |\alpha_3|\, r^2$$

$$\Rightarrow Comme \quad \lambda \to m^2 \quad soit \quad (2n)^2 \quad ou \quad (2n+1)^2 \quad ou \quad (2n+2)^2$$

$$L'équation\ devient \quad \frac{d^2R(r)}{dr^2} r^2 + \frac{dR(r)}{dr} r + (|\alpha_3|\, r^2 - m^2)R(r) = 0 \quad équation\ de\ Bessel$$

$$Posons\ |\alpha_3| = k^2 \Rightarrow Solution \quad R(r) = A\, J_m(k\,r) + B\, Y_m(k\,r)$$

*On a donc le passage des fonctions de Mathieu radiales J et N à des fonctions de Bessel, comme suit :*

$$\begin{cases} Je_{2n}(\eta,q) \to p'_{2n}\, J_{2n}(k\,r) \\ Je_{2n+1}(\eta,q) \to p'_{2n+1}\, J_{2n+1}(k\,r) \\ Jo_{2n+1}(\eta,q) \to s'_{2n+1}\, J_{2n+1}(k\,r) \\ Jo_{2n+2}(\eta,q) \to s'_{2n+2}\, J_{2n+2}(k\,r) \end{cases} \qquad \begin{cases} Ne_{2n}(\eta,q) \to p'_{2n}\, Y_{2n}(k\,r) \\ Ne_{2n+1}(\eta,q) \to p'_{2n+1}\, Y_{2n+1}(k\,r) \\ No_{2n+1}(\eta,q) \to s'_{2n+1}\, Y_{2n+1}(k\,r) \\ No_{2n+2}(\eta,q) \to s'_{2n+2}\, Y_{2n+2}(k\,r) \end{cases}$$

*Les coefficients de proportionnalité sont les mêmes entre les premières et secondes solutions (voir MacLachlan « Theory and application of Mathieu Functions, Appendix I, page 368). Mais il n'importent que peu car ils se neutralisent toujours dans le développement en série. Il en est de même lorsque le paramètre q est négatif avec les fonctions de Bessel I et K (voir plus loin) :*

$$\begin{cases} Ie_{2n}(\eta,-q) \to p'_{2n}\, I_{2n}(k\,r) \\ Ie_{2n+1}(\eta,-q) \to s'_{2n+1}\, I_{2n+1}(k\,r) \\ Io_{2n+1}(\eta,-q) \to p'_{2n+1}\, I_{2n+1}(k\,r) \\ Io_{2n+2}(\eta,-q) \to s'_{2n+2}\, I_{2n+2}(k\,r) \end{cases} \qquad \begin{cases} Ke_{2n}(\eta,-q) \to \dfrac{p'_{2n}}{\pi} K_{2n}(k\,r) \\ Ke_{2n+1}(\eta,-q) \to \dfrac{s'_{2n+1}}{\pi} K_{2n+1}(k\,r) \\ Ko_{2n+1}(\eta,-q) \to \dfrac{p'_{2n+1}}{\pi} K_{2n+1}(k\,r) \\ Ko_{2n+2}(\eta,-q) \to \dfrac{s'_{2n+2}}{\pi} K_{2n+2}(k\,r) \end{cases}$$

*Il reste à évoquer le passage à la limite du cercle dans les intégrales mises en œuvre dans la construction des solutions des problèmes aux limites. Elles se présentent sous la forme suivante pour ne prendre qu'un exemple :*

$$A_{n_\eta,n_\theta}=\frac{\int_0^{l_\eta} d\eta Je_{2n_\theta}\left(\eta,q^{je}_{n_\eta,2n_\theta}\right)\int_0^{2\pi} d\theta\left(Cosh(2\eta)-Cos(2\theta)\right)f(\eta,\theta)ce_{2n_\theta}\left(\theta,q^{je}_{n_\eta,2n_\theta}\right)}{\int_0^{l_\eta}\int_0^{2\pi} d\theta d\eta\left(Cosh(2\eta)-Cos(2\theta)\right)\left(Je_{2n_\theta}\left(\eta,q^{je}_{n_\eta,2n_\theta}\right)\right)^2\left(ce_{2n_\theta}\left(\theta,q^{je}_{n_\eta,2n_\theta}\right)\right)^2}$$

$$T(\eta,\theta,z)=\sum_{n_\eta=1}^{n_\eta=\infty}\sum_{n_\theta=0}^{n_\theta=\infty}\frac{A_{n_\eta,n_\theta}Sinh\left(\frac{2\sqrt{q^{je}_{n_\eta,2n_\theta}}}{c}z\right)}{Sinh\left(\frac{2\sqrt{q^{je}_{n_\eta,2n_\theta}}}{c}l_z\right)}Je_{2n_\theta}\left(\eta,q^{je}_{n_\eta,2n_\theta}\right)ce_{2n_\theta}\left(\theta,q^{je}_{n_\eta,2n_\theta}\right)$$

*Le terme de cosinus hyperbolique prédominent dans le passage au cercle. On peut donc écrire :*

$$A_{n_\eta,n_\theta}\approx\frac{\sqrt{1+\partial_{n_\theta,0}}\int_0^{l_\eta} d\eta Cosh(2\eta)Je_{2n_\theta}\left(\eta,q^{je}_{n_\eta,2n_\theta}\right)\int_0^{2\pi} d\theta\ f(\eta,\theta)Cos(2n_\theta\theta)}{\int_0^{l_\eta} d\eta\ Cosh(2\eta)\left(Je_{2n_\theta}\left(\eta,q^{je}_{n_\eta,2n_\theta}\right)\right)^2\int_0^{2\pi} d\theta\left(Cos(2n_\theta\theta)\right)^2}$$

$$De\ plus\ r=\frac{ce^\eta}{2}\Rightarrow dr=rd\eta\Rightarrow d\eta Cosh(2\eta)\approx\frac{dr}{2r}e^{2\eta}\approx 2\frac{dr}{rc^2}r^2\approx\frac{2rdr}{c^2}\quad et\quad l_\eta\to l_r$$

$$A_{n_\eta,n_\theta}Je_{2n_\theta}\left(\eta,q^{je}_{n_\eta,2n_\theta}\right)\approx\frac{\sqrt{1+\partial_{n_\theta,0}}\,p'_{2n}\,J_{2n_\theta}(k\,r)\frac{p'_{2n}}{c^2}\int_0^{l_r} 2rdrJ_{2n}(k\,r)\int_0^{2\pi} d\theta\ f(\eta,\theta)Cos(2n_\theta\theta)}{\pi\left(1+\partial_{n_\theta,0}\right)\frac{(p'_{2n})^2}{c^2}\int_0^{l_r} 2rdr\left(J_{2n}(k\,r)\right)^2}$$

$$\Rightarrow A_{n_\eta,n_\theta}Je_{2n_\theta}\left(\eta,q^{je}_{n_\eta,2n_\theta}\right)\approx\frac{J_{2n_\theta}(k\,r)\int_0^{l_r} rdrJ_{2n_\theta}(k\,r)\int_0^{2\pi} d\theta\ f(r,\theta)Cos(2n_\theta\theta)}{\pi\sqrt{1+\partial_{n_\theta,0}}\int_0^{l_r} rdr\left(J_{2n_\theta}(k\,r)\right)^2}$$

$$Comme\quad|\alpha_3|=k^2=\frac{4q^{je}_{n_\eta,2n_\theta}}{c^2}\Rightarrow\frac{2\sqrt{q^{je}_{n_\eta,2n_\theta}}}{c}=k$$

$$notation\quad n_\eta\to n_r\quad,\quad k\to k_{n_r,2n_\theta}\quad,\quad f(\eta,\theta)\to f(r,\theta)$$

$$\Rightarrow T(\eta,\theta,z)=\frac{1}{\pi}\sum_{n_r=1}^{n_r=\infty}\sum_{n_\theta=0}^{n_\theta=\infty}\frac{B_{n_\eta,n_\theta}Sinh\left(k_{n_r,2n_\theta}z\right)}{\left(1+\partial_{n_\theta,0}\right)Sinh\left(k_{n_r,2n_\theta}l_z\right)}J_{2n_\theta}(k_{n_r,2n_\theta}\,r)\,Cos(2n_\theta\theta)\quad avec\quad k_{n_r,2n_\theta}\quad tq\quad J_{2n_\theta}(k_{n_r,2n_\theta}\,l_r)=0$$

$$et\quad B_{n_\eta,n_\theta}=\frac{\int_0^{l_r} dr\,rJ_{2n_\theta}(k_{n_r,2n_\theta}\,r)\int_0^{2\pi} d\theta\ f(\eta,\theta)Cos(2n_\theta\theta)}{\int_0^{l_r} dr\,r\left(J_{2n_\theta}(k_{n_r,2n_\theta}r)\right)^2}$$

*Pour ce qui est d'un problème aux limites avec la variable de séparation positive (problème aux limites homogène dans la dimension axiale) la solution utilisait des fonctions de Mathieu à paramètre négatif, là encore le passage à la limite est assez simple :*

$$ce_{2n}(\vartheta,-q) \to \frac{Cos(2n\vartheta)}{\sqrt{1+\partial_{n,0}}}$$
$$ce_{2n+1}(\vartheta,-q) \to Cos((2n+1)\vartheta)$$
$$se_{2n+1}(\vartheta,-q) \to Sin((2n+1)\vartheta)$$
$$se_{2n+2}(\vartheta,-q) \to Sin((2n+2)\vartheta)$$

*Les équations séparées se transforment comme suit :*

$$\alpha_3 > 0 \Rightarrow q = -\frac{|\alpha_3|c^2}{4} \Rightarrow q = -|q| \Rightarrow |\alpha_3| = \frac{4|q|}{c^2} \quad et \quad \lambda = \alpha_2 + \frac{\alpha_3 c^2}{2}$$
$$Z''(z) + \alpha_3 Z(z) = 0 \Rightarrow Z(z) = A_z Sin\left(\frac{2\sqrt{|q|}}{c}\right) + B_z Sin\left(\frac{2\sqrt{|q|}}{c}\right)$$
$$\Theta''(\theta) + (\lambda + 2|q|\, Cos(2\theta))\Theta(\theta) = 0$$
$$R''(\eta) - (\lambda + 2|q|\, Cosh(2\eta))R(\eta) = 0$$
$$\Theta(\theta) = A_\theta ce_n(\theta,-|q|) + B_\theta fe_n(\theta,-|q|) \quad ou \quad \Theta(\theta) = A_\theta se_n(\theta,-|q|) + B_\theta ge_n(\theta,-|q|)$$
$$R(\eta) = C_\eta Ie_n(\eta,-|q|) + D_\eta Ke_n(\eta,-|q|) \quad ou \; R(\eta) = C_\eta Io_n(\eta,-|q|) + D_\eta Ko_n(\eta,-|q|)$$
$$Comme \quad \eta \to +\infty \quad et \quad c \to 0 \quad et \quad c\, Cosh(\eta) \to r \quad et \quad c\, Cosh(l_\eta) \to l_r \Leftrightarrow \frac{ce^\eta}{2} \to r \Leftrightarrow \frac{c^2 e^{2\eta}}{4} \to r^2$$
$$r = \frac{ce^\eta}{2} \Rightarrow dr = \frac{ce^\eta}{2} d\eta = r d\eta \Rightarrow \frac{dr}{d\eta} = r \Rightarrow R'(\eta) = \frac{dR(\eta)}{d\eta} = \frac{dR(\eta)}{dr}\frac{dr}{d\eta} = \frac{dR(\eta)}{dr} r$$
$$\Theta''(\theta) + (\lambda + 2|q|\, Cos(2\theta))\Theta(\theta) = 0 \Rightarrow \Theta''(\theta) + \lambda\,\Theta(\theta) = 0$$
$$R''(\eta) = \frac{d^2R(\eta)}{dr^2} r^2 + \frac{dR(\eta)}{dr} r$$
$$\Rightarrow 2|q|\, Cosh(2\eta) \approx |q|\, e^{2\eta} \approx \frac{|\alpha_3|c^2}{4}\frac{4}{c^2} r^2 \approx |\alpha_3|\, r^2 \quad \lambda = \alpha_2 + \frac{\alpha_3 c^2}{2} \approx \alpha_2$$
$$\alpha_2 = n \quad spectre\ discret\ de\ valeurs\ entières \quad Posons\ |\alpha_3| = k^2$$
$$\Rightarrow R''(\eta) - (n + k^2 r^2)R(\eta) = 0$$
$$L'équation\ devient \quad \frac{d^2R(r)}{dr^2} r^2 + \frac{dR(r)}{dr} r - (k\, r^2 + n)R(r) = 0 \quad équation\ de\ Bessel\ modifiée$$
$$\Rightarrow Solution \quad R(r) = A\, I_n(k\, r) + B\, K_n(k\, r)$$

*On a donc le passage des fonctions de Mathieu radiales à des fonctions de Bessel, comme suit :*

$$
\begin{aligned}
&Ie_{2n}(\eta,-q) \to \gamma_{2n} I_{2n}(k\,r)\\
&Ie_{2n+1}(\eta,-q) \to \gamma_{2n+1} I_{2n+1}(k\,r)\\
&Io_{2n+1}(\eta,-q) \to \tau_{2n} I_{2n}(k\,r)\\
&Io_{2n+2}(\eta,-q) \to \tau_{2n+1} I_{2n+1}(k\,r)
\end{aligned}
$$

*Là encore, les coefficients de proportionnalité importent peu car ils se neutralisent toujours dans le développement en série.*

*Le développement en série et les coefficients intégraux deviennent les suivants, pour ne retenir comme exemple qu'un seul groupe de termes dans les solutions trouvées (voir plus loin) :*

$$
avec \quad \lambda_{n_z} = \frac{n_z \pi}{l_z} \quad B_{n_z,n_\theta} = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{l_z} dz\ f(\theta,z) ce_{2n_\theta}\left(\theta,-\frac{{n_z}^2\pi^2c^2}{4{l_z}^2}\right) Sin\left(\lambda_{nz} z\right)
$$

$$
T(\eta,\theta,z) = \frac{2}{\pi\, l_z} \sum_{n_z=1}^{n_z=\infty} \sum_{n_\theta=0}^{n_\theta=\infty} B_{n_z,n_\theta} \frac{Ie_{2n_\theta}\left(\eta,-\frac{{n_z}^2\pi^2c^2}{4{l_z}^2}\right)}{Ie_{2n_\theta}\left(l_\eta,-\frac{{n_z}^2\pi^2c^2}{4{l_z}^2}\right)} ce_{2n_\theta}\left(\theta,-\frac{{n_z}^2\pi^2c^2}{4{l_z}^2}\right) Sin\left(\lambda_{nz} z\right)
$$

$$
c \to 0 \Rightarrow ce_{2n_\theta}\left(\theta,-\frac{{n_z}^2\pi^2c^2}{4{l_z}^2}\right) \to \frac{Cos(2n_\theta\,\vartheta)}{\sqrt{1+\partial_{n_\theta,0}}} \quad Ie_{2n_\theta}\left(\eta,-\frac{{n_z}^2\pi^2c^2}{4{l_z}^2}\right) \to \gamma_{2n_\theta} I_{2n_\theta}\left(\frac{n_z\pi}{l_z} r\right)
$$

$$
T(\eta,\theta,z) \to \frac{2}{\pi\, l_z} \sum_{n_z=1}^{n_z=\infty} \sum_{n_\theta=0}^{n_\theta=\infty} B_{n_z,n_\theta} \frac{I_{2n_\theta}\left(\frac{n_z\pi}{l_z} r\right)}{I_{2n_\theta}\left(\frac{n_z\pi}{l_z} l_r\right)} \frac{Cos\left(2n_\theta\theta\right)}{\left(1+\partial_{n_\theta,0}\right)} Sin\left(\lambda_{nz} z\right)
$$

$$
B_{n_z,n_\theta} = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{l_z} dz\ f(\theta,z) Cos\left(2n_\theta\theta\right) Sin\left(\lambda_{nz} z\right)
$$

*Dans les deux cas, que ce soit homogène radial ou homogène axial on retrouve bien les solutions données dans le système de coordonnées cylindrique à trois dimensions.*

***Dégénérescence de l'ellipse en cercle et formes des solutions radiales et angulaires à deux dimensions***

*Par la suite on verra que les solutions de problème aux limites elliptiques en deux dimension se présente sous la forme :*

$$A_0^{Y+X+} = 2\int_0^{\pi} d\vartheta\, f_{\theta,Y+,X+}(\theta) \quad A_n^{Y+X+} = \int_0^{\pi} d\vartheta\, f_{\theta,Y+,X+}(\theta) Cos(2n\,\vartheta) \quad A_n^{Y+X-} = \int_0^{\pi} d\vartheta\, f_{\theta,Y+,X-}(\theta) Sin((2n+1)\vartheta)$$

$$A_n^{Y-X+} = \int_0^{\pi} d\vartheta\, f_{\theta,Y-,X+}(\theta) Cos((2n+1)\vartheta) \quad A_n^{Y-X-} = \int_0^{\pi} d\vartheta\, f_{\theta,Y-,X-}(\theta) Sin((2n+2)\vartheta)$$

$$T(\eta,\theta) = \frac{A_0^{Y+X+}}{2\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{n=+\infty} A_n^{Y+X+} \frac{Cosh(2n\,\eta)}{Cosh(2n\,l_\eta)} Cos(2n\,\vartheta) + \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{n=+\infty} A_n^{Y+X-} \frac{Sinh((2n+1)\eta)}{Sinh((2n+1)l_\eta)} Sin((2n+1)\vartheta) +$$

$$+\frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{n=+\infty} A_n^{Y-X+} \frac{Cosh((2n+1)\eta)}{Cosh((2n+1)l_\eta)} Cos((2n+1)\vartheta) + \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{n=+\infty} A_n^{Y-X-} \frac{Sinh((2n+2)\eta)}{Sinh((2n+2)l_\eta)} Sin((2n+2)\vartheta)$$

*Le passage à la limite du cercle, comme vu précédemment implique que :*

$$\eta \to +\infty \quad et \quad c \to 0 \quad et \quad c\,Cosh(\eta) \to r \quad et \quad c\,Cosh(l_\eta) \to l_r \quad et \quad c\,Sinh(\eta) \to r \Rightarrow e^{\eta} = \frac{2r}{c}$$

$$\Rightarrow \frac{Cosh(2n\,\eta)}{Cosh(2n\,l_\eta)} \to \frac{r^{2n}}{l_r^{\,2n}} \quad \frac{Sinh((2n+1)\eta)}{Sinh((2n+1)l_\eta)} \to \frac{r^{2n+1}}{l_r^{\,2n+1}} \quad \frac{Sinh((2n+2)\eta)}{Sinh((2n+2)l_\eta)} \to \frac{r^{2n+2}}{l_r^{\,2n+2}} \quad \frac{Cosh((2n+1)\eta)}{Cosh((2n+1)l_\eta)} \to \frac{r^{2n+1}}{l_r^{\,2n+1}}$$

$$\Rightarrow T(\eta,\theta) = \frac{A_0^{Y+X+}}{2\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{n=+\infty} A_n^{Y+X+} \frac{r^{2n}}{l_r^{\,2n}} Cos(2n\,\vartheta) + \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{n=+\infty} A_n^{Y+X-} \frac{r^{2n+1}}{l_r^{\,2n+1}} Sin((2n+1)\vartheta) +$$

$$+\frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{n=+\infty} A_n^{Y-X+} \frac{r^{2n+1}}{l_r^{\,2n+1}} Cos((2n+1)\vartheta) + \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{n=+\infty} A_n^{Y-X-} \frac{r^{2n+2}}{l_r^{\,2n+2}} Sin((2n+2)\vartheta)$$

*Ce sont exactement les solutions en coordonnées polaires.*

*Lorsque le problème concerne une section elliptique creuse. Les fonctions radiales sont par exemple de la forme :*

$$\frac{e^{2n(\eta - l_{\eta 1})} - e^{-2n(\eta - l_{\eta 1})}}{e^{2n(l_{\eta 2} - l_{\eta 1})} - e^{-2n(l_{\eta 2} - l_{\eta 1})}} \quad or \quad e^{2n(\eta - l_{\eta 1})} \to \left(\frac{r}{l_{r1}}\right)^{2n}$$

$$\frac{e^{2n(\eta - l_{\eta 1})} - e^{-2n(\eta - l_{\eta 1})}}{e^{2n(l_{\eta 2} - l_{\eta 1})} - e^{-2n(l_{\eta 2} - l_{\eta 1})}} \to \frac{\left(\frac{r}{l_{r1}}\right)^{2n} - \left(\frac{l_{r1}}{r}\right)^{2n}}{\left(\frac{l_{r2}}{l_{r1}}\right)^{2n} - \left(\frac{l_{r1}}{l_{r2}}\right)^{2n}}$$

*Il en serait de même avec toutes les autres composantes de symétrie d'une solution générale. Cela forme donc les fonctions radiales solutions du problème aux limites en coordonnées polaires.*

***Les solutions de l'équation de Mathieu algébrique par quadrature d'Hermite-Darboux***

*Soit l'une des formes algébriques de l'équation de Mathieu*

$$y''(\xi)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\xi}+\frac{1}{\xi-1}\right)y'(\xi)+\frac{\lambda-2q+4q\xi}{4\xi(1-\xi)}\,y(\zeta)=0$$

$$p(\xi)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\xi}+\frac{1}{\xi-1}\right)\quad q(\xi)=\frac{\lambda-2q+4q\xi}{4\xi(1-\xi)}$$

*où les points singuliers réguliers de l'équation sont ξ=0 et ξ=1, le point singulier ξ=∞ est irrégulier. Cette équation n'est certes pas fuschienne mais en revanche il est possible de montrer que le produit de deux solutions indépendantes de cette équation satisfait à une équation du troisième degré. En effet elle est de la forme :*

$$y''(\xi)+p(\xi)\,y'(\xi)+q(\xi)\,y(\zeta)=0\quad avec\quad p(\xi)=\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}\quad f(\xi)=\sqrt{\xi(\xi-1)}$$

$$p(\xi)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\xi}+\frac{1}{\xi-1}\right)\quad q(\xi)=-\frac{\lambda-2q+4q\xi}{4\xi(\xi-1)}$$

*Et dans ce cas le produit de deux solutions indépendantes et le carré de chaque solution satisfont à l'équation suivante :*

$$w^{(3)}(\xi)+3p(\xi)w''(\xi)+\left(p'(\xi)+2p^2(\xi)+4q(\xi)\right)w'(\xi)+\left(4p(\xi)\,q(\xi)+2q'(\xi)\right)w(\xi)=0$$

*De plus si la fonction w(ξ) s'avère analytique autour de ξ=0 et de ξ=1, alors la solution de l'équation de Mathieu algébrique sur ξ€[0,1] peut formellement s'écrire sous une forme de quadrature à partir de la solution w(ξ). On applique un résultat plus générale pour des équations différentielles du second degré de la forme :*

$$p(z)=\sum_{l=1}^{l=p}\frac{\gamma_l}{z-a_l}\quad p(z)=\frac{f'(z)}{f(z)}\quad f(z)=\prod_{l=1}^{l=p}(z-a_l)^{\gamma_l}\quad et\quad y''(z)+p(z)\,y'(z)+q(z)\,y(z)=0$$

$$w(z)=y_1(z)y_2(z)\Rightarrow w^{(3)}(z)+3p(z)\,w''(z)+\left(p'(z)+2p^2(z)+4q(z)\right)w'(z)+\left(4p(z)q(z)+2q'(z)\right)w(z)=0$$

$$\Rightarrow y_{1,2}(z)=\sqrt{w(z)}\,e^{\pm i\frac{\nu}{2}\times\int_z dt\frac{\prod_{l=1}^{l=p}(t-a_l)^{-\gamma_l}}{w(t)}}\quad avec\quad \nu^2=\prod_{l=1}^{l=p}(z-a_l)^{2\gamma_l}\left(2\,w(z)\,w''(z)-(w'(z))^2+2\,p(z)\,w(z)\,w'(z)+4\,q(z)\,(w(z))^2\right)$$

*Appliqué au cas de l'équation algébrique de Mathieu, il vient :*

$$\begin{cases}\xi\in[0,1]\quad f(\xi)=\sqrt{\xi(\xi-1)}\quad p(\xi)=\dfrac{f'(\xi)}{f(\xi)}\Rightarrow y_{1,2}(\xi)=\sqrt{w(\xi)}\,Exp\left(\pm i\dfrac{\nu}{2}\times\displaystyle\int_0^{\xi}\dfrac{dt}{f(t)\,w(t)}\right)=\sqrt{w(\xi)}\,Exp\left(\pm\dfrac{\nu}{2}\times\displaystyle\int_0^{\xi}\dfrac{dt}{w(t)\sqrt{t(1-t)}}\right)\\ \nu^2=\xi(\xi-1)\left(2\,w(\xi)\,w''(\xi)-(w'(\xi))^2+2\,p(\xi)\,w(\xi)\,w'(\xi)+4\,q(\xi)\,(w(\xi))^2\right)\quad w(\xi)=c_0+c_1\xi+c_2\xi^2+\ldots\quad Convention\quad y_{1,2}(0)=0\end{cases}$$

*La constante ν est une intégrale première de l'équation différentielle du troisième degré (dîtes « au produit »). Elle est par définition indépendante de l'argument ξ. Nous verrons plus loin comment la calculer.*

*Évidemment la solution produit est définie à une constante multiplicative près. Aussi il est possible de la fixer également par convention, par exemple :* $w(0)=1 \Rightarrow c_0=1$*. Prenons une solution produit proportionnel :* $\tilde{w}(\xi)=\alpha\, w(\xi)$*, alors la constante* $v^2$ *est également proportionnelle du même terme au carré :* $\tilde{v}^2=\alpha^2 v$ *. Aussi la solution par quadrature reste identique :*

$$\tilde{y}_{1,2}(\xi)=\sqrt{\tilde{w}(\xi)}\; Exp\left(\pm\frac{\tilde{v}}{2}\times\int_0^{\xi}\frac{dt}{\tilde{w}(t)\sqrt{t(1-t)}}\right)=\sqrt{\alpha}\sqrt{w(\xi)}\; Exp\left(\pm\frac{v}{2}\times\int_0^{\xi}\frac{dt}{w(t)\sqrt{t(1-t)}}\right)=\sqrt{\alpha}\times y_{1,2}(\xi)$$

*Donc la convention* $w(0)=1 \Rightarrow c_0=1$ *n'influe pas dans la construction de la solution par quadrature de Hermite-Darboux.*

*<u>Analyticité de la solution « produit »</u>*

*Pour démontrer qu'il existe une solution analytique autour de $\xi=0$, l'équation algébrique du produit de deux solutions s'écrit :* $\xi(1-\xi)\,w^{(3)}(\xi)+\frac{3}{2}(1-2\xi)\,w''(\xi)+(\lambda-1-2q+4q\xi)\,w'(\xi)+2\,q\,w(\xi)=0$*.On détermine les fonctions indicielles comme le développement de la fonction $f(\xi,\sigma)$ qui s'écrit ici dans le cas d'une équation différentielle du troisième degré :*

$$\begin{cases} f(\xi,\sigma)=[\sigma]_3+[\sigma]_2\,\xi\,\dfrac{p_1(\xi)}{p_0(\xi)}+[\sigma]_1\,\xi^2\,\dfrac{p_2(\xi)}{p_0(\xi)}+[\sigma]_0\,\xi^3\,\dfrac{p_3(\xi)}{p_0(\xi)} \\ f(\xi,\sigma)=\displaystyle\sum_{i=0}^{i=+\infty}f_i(\sigma)\,\xi^i \quad [\sigma]_3=\sigma(\sigma-1)(\sigma-2) \qquad [\sigma]_2=\sigma(\sigma-1) \qquad [\sigma]_1=\sigma \qquad [\sigma]_0=1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(\xi,\sigma)=\sigma(\sigma-1)(\sigma-2)+\sigma(\sigma-1)\xi\,\frac{p_1(\xi)}{p_0(\xi)}+\sigma\,\xi^2\,\frac{p_2(\xi)}{p_0(\xi)}+\xi^3\,\frac{p_3(\xi)}{p_0(\xi)}$$

*La manière la plus simple de calculer les fonctions $f_i(\sigma)$ est de construire la fonction $f(z,\sigma)$ et de calculer formellement ou numériquement ses dérivées successives au point singulier $z=0$ soit :*

$$f(\xi,\sigma)=\sum_{i=0}^{i=+\infty}\frac{f^{(i)}(\xi,\sigma)}{i\,!}\,\xi^i \Rightarrow f_i(\sigma)=\frac{f^{(i)}(0,\sigma)}{i\,!}=\frac{1}{i\,!}\times\left.\frac{\partial^i f(\xi,\sigma)}{\partial z^i}\right|_{\xi=0}$$

*Un rapide calcul à l'aide de Mathematica nous donne :*

$$f_0(\sigma)=\frac{\sigma(\sigma-1)(2\sigma-1)}{2}$$

$$f_1(\sigma)=-\frac{\sigma}{2}\times(3\sigma+4q-1-2\lambda)$$

$$\forall l\geq 2 \quad f_l(\sigma)=\frac{1}{2}\times\left(4q+\sigma+4q\sigma-3\sigma^2+2\sigma\lambda\right)$$

*Les racines indicielles telles que $f_0(\sigma)=0$ forment donc deux sous ensembles chacun disposé dans l'ordre inverse des valeurs : $\begin{cases}\sigma_0=1 \quad \sigma_1=0\\ \sigma_2=\dfrac{1}{2}\end{cases}$. Dans le premier groupe les deux racines sont séparées par un entier et dans ce cas il y a présence possible d'un terme logarithmique dans le développement de Fröbenius pour l'indice $\sigma_1=0$. Voyons si les conditions pour que ce terme logarithmique disparaisse sont remplies. D'après la théorie exposée par E.L.Ince il convient que $\mathbf{F}_1(\sigma=0)=f_1(0)=0$ ce qui est vérifié au vu de l'expression de la fonction indicielle $f_1(\sigma)$ donnée plus haut. Dans ces conditions il n'y a pas présence de terme logarithmique dans la solution pour $\sigma=0$ et par conséquent une solution de la forme $w(\xi)=\sum_{l=0}^{l=+\infty} c_l\xi^l$ existe soit une solution analytique (holomorphe dans le plan complexe des $\xi$).*

*<u>Calcul de la constante v</u>*

*Dans ces conditions on peut donc bien calculer la constante v explicitement à partir du développement analytique de la solution « produit » w(ξ), comme suit :*

$$
\begin{aligned}
&w(\xi)=c_0+c_1\xi+c_2\xi^2+\dots\\
&w'(\xi)=c_1+2c_2\xi+\dots\\
&w''(\xi)=2c_2+\dots\\
&(f(\xi))^2=\xi(\xi-1)\\
&v^2=Cste=(f(\xi))^2\left(2\,w(\xi)\,w''(\xi)-(w'(\xi))^2+2\,p(\xi)\,w(\xi)\,w'(\xi)+4\,q(\xi)\,(w(\xi))^2\right)\\
&=\underset{\xi\to 0}{Lim}\quad \xi(\xi-1)\left(2\,w(\xi)\,w''(\xi)-(w'(\xi))^2+2\,p(\xi)\,w(\xi)\,w'(\xi)+4\,q(\xi)\,(w(\xi))^2\right)
\end{aligned}
$$

*Il suffit donc de calculer la limite lorsque ξ tend vers 0. Il vient facilement :*

$$
\begin{aligned}
&v^2=\underset{\xi\to 0}{Lim}\quad \left(2\xi(\xi-1)p(\xi)\,w(\xi)\,w'(\xi)+4\xi(\xi-1)\,q(\xi)\,(w(\xi))^2\right)\\
&\begin{cases}\underset{\xi\to 0}{Lim}\quad 2\xi(\xi-1)\,p(\xi)=\underset{\xi\to 0}{Lim}\quad(\xi-1+\xi)=-1\\ \underset{\xi\to 0}{Lim}\quad 4\xi(\xi-1)\,q(\xi)=-(\lambda-2q)\end{cases} \Rightarrow \quad v^2=-c_0c_1-(\lambda-2q)\,c_0{}^2=(2q-\lambda)\,c_0{}^2-c_0c_1\\
&Supposons\quad c_0=1\Rightarrow v^2=2q-\lambda-c_1
\end{aligned}
$$

*Il reste donc à déterminer le coefficient $c_1$. Pour cela il est possible de déduire une relation de récurrence à trois termes pour les coefficients de la solution « produit ». En effet l'équation du troisième degré s'écrit explicitement :*

$$\xi(1-\xi)\,w^{(3)}(\xi)+\frac{3}{2}(1-2\xi)\,w''(\xi)+(\lambda-1-2q+4q\xi)\,w'(\xi)+2\,q\,w(\xi)=0$$

*En injectant le développement de W :*

$$w(\xi)=\sum_{n=0}^{n=+\infty} c_n \xi^n \Rightarrow v_{n+1}c_{n+2}=-u_n c_{n+1}+c_n$$
$$u_n=\frac{(n+1)\left((n+1)^2-\lambda+2q\right)}{2q(2n+1)} \qquad v_n=-\frac{n(n+1)(2n+1)}{4q(2n-1)}$$

*Lorsque la relation de récurrence est écrite sous une forme assez standard alors il y a la correspondance suivante de paramètres :*

$$A_n c_{n-1}+B_n c_n+C_n c_{n+1}=0 \Rightarrow u_n=-\frac{B_{n+1}}{A_{n+1}} \qquad et \qquad v_n=-\frac{C_n}{A_n}$$
$$A_n=4q(2n-1) \quad B_n=2n\left(\lambda-2q-n^2\right) \quad C_n=n(n+1)(2n+1)$$

*En introduisant les fractions successives :* $\frac{c_n}{c_{n+1}}$*, la relation de récurrence peut s'écrire :* $\frac{c_n}{c_{n+1}}=u_n+\frac{v_{n+1}}{\frac{c_{n+1}}{c_{n+2}}}$

*Cela permet d'exprimer la relation de récurrence comme une fraction continue. Pour calculer la valeur limite de cette fraction continue, introduisons les déterminants suivants de taille (l-n+1,l-n+1= avec l >= n dans tous les cas :*

$$n<l \quad K(n,l)=\begin{vmatrix} 1 & \frac{v_{n+1}}{u_n} & 0 & ... & ... & 0 \\ -u_{n+1}^{-1} & 1 & \frac{v_{n+2}}{u_{n+1}} & 0 & ... & 0 \\ 0 & -u_{n+2}^{-1} & 1 & \frac{v_{n+3}}{u_{n+2}} & ... & ... \\ ... & 0 & ... & ... & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & 1 & \frac{v_l}{u_{l-1}} \\ 0 & ... & ... & 0 & -u_l^{-1} & 1 \end{vmatrix} \qquad K(l-1,l)=\begin{vmatrix} 1 & \frac{v_l}{u_{l-1}} \\ -u_l^{-1} & 1 \end{vmatrix} \qquad K(l,l)=1$$

*Alors les déterminants K(n,l) suivant la relation de récurrence suivante :*

$$K(n,l)=K(n+1,l)+\frac{v_{n+1}}{u_{n+1}u_n}K(n+2,l) \Rightarrow \frac{K(n,l)}{K(n+1,l)}=1+\frac{v_{n+1}}{u_{n+1}u_n\frac{K(n+1,l)}{K(n+2,l)}} \Rightarrow u_n\frac{K(n,l)}{K(n+1,l)}=u_n+\frac{v_{n+1}}{u_{n+1}\frac{K(n+1,l)}{K(n+2,l)}}$$

*Donc la séquence* $u_n\frac{K(n,l)}{K(n+1,l)}$ *suit exactement la même récurrence que la fraction* $\frac{c_n}{c_{n+1}}$ *et donc en conséquence la fraction* $\frac{c_n}{c_{n+1}}$ *est égal à l'expression* $u_n\frac{K(n,l)}{K(n+1,l)}$ *à une constante multiplicative près.*

*Imaginons que la récurrence est limitée à l termes. Cela signifie notamment dans l'expression de la récurrence :* $A_n c_{n-1} + B_n c_n + C_n c_{n+1} = 0$ *que le terme $A_{l+1}$ s'annule et donc que le développement devient strictement polynomial car tous les termes pour n > l s'annule. Alors si nous calculons :*

$$u_{l-1}\frac{K(l-1,l)}{K(l,l)} = u_{l-1}K(l-1,l) = u_{l-1}\times\left(1+\frac{v_l}{u_{l-1}u_l}\right) = u_{l-1} + v_l u_l^{-1}$$
$$Or \quad u_l^{-1} = -\frac{A_{l+1}}{B_{l+1}} = 0 \Rightarrow u_{l-1}\frac{K(l-1,l)}{K(l,l)} = u_{l-1} = \frac{B_l}{A_l}$$

*Or la fraction* $\frac{c_{l-1}}{c_l}$ *est égale à cette expression en écrivant la dernière relation de récurrence pour n=l :* $A_l c_{l-1} + B_l c_l + C_l c_{l+1} = A_l c_{l-1} + B_l c_l = 0 \Rightarrow \frac{c_{l-1}}{c_l} = -\frac{B_l}{A_l} = u_{l-1}$. *Dans ce cas donc la constante multiplicative est égal à l'unité. Et nous écrirons donc précisément :* $\forall n \in (0,1,\ldots,l-1) \quad \frac{c_n}{c_{n+1}} = u_n\frac{K(n,l)}{K(n+1,l)}$

*Maintenant dans le cas où le développement est infini le raisonnement est identique en se plaçant à une valeur l suffisamment grande quelque soit la valeur n tendant vers l'infini tel que l>n, de telle manière que le terme $A_{l+1}$ soit négligeable. Alors on voit que la constante multiplicative est également l'unité si l est symboliquement l'infini. Dans ces conditions on peut écrire :*

$$\forall n \geq 0 \quad \frac{c_n}{c_{n+1}} = u_n \times \lim_{l\to\infty} \frac{K(n,l)}{K(n+1,l)} = \frac{c_n}{c_{n+1}} = u_n \times \frac{K(n,+\infty)}{K(n+1,+\infty)}$$

*Si nous en revenons à l'expression de la constante $v^2$ :*

$$\frac{c_0}{c_1} = u_0 \times \frac{K(0,+\infty)}{K(1,+\infty)} \quad et \quad c_0 = 1 \Rightarrow c_1 = \frac{K(1,+\infty)}{u_0 \times K(0,+\infty)}$$
$$v^2 = 2q - \lambda - c_1 = 2q - \lambda - \frac{K(1,+\infty)}{u_0 \times K(0,+\infty)} = 2q - \lambda + \frac{A_1}{B_1} \times \frac{K(1,+\infty)}{K(0,+\infty)}$$

*Pour une récurrence écrite sous la forme :*

$$A_n c_{n-1} + B_n c_n + C_n c_{n+1} = 0 \Rightarrow u_n = -\frac{B_{n+1}}{A_{n+1}} \qquad et \qquad v_n = -\frac{C_n}{A_n}$$

*Alors les déterminants K(n,l) s'écrivent :*

$$n < l \quad K(n,l) = \begin{vmatrix} 1 & \frac{C_{n+1}}{B_{n+1}} & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ \frac{A_{n+2}}{B_{n+2}} & 1 & \frac{C_{n+2}}{B_{n+2}} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \frac{A_{n+3}}{B_{n+3}} & 1 & \frac{C_{n+3}}{B_{n+3}} & \ldots & 0 \\ \ldots & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 1 & \frac{C_l}{B_l} \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & \frac{A_{l+1}}{B_{l+1}} & 1 \end{vmatrix} \qquad K(l-1,l) = \begin{vmatrix} 1 & \frac{C_l}{B_l} \\ \frac{A_{l+1}}{B_{l+1}} & 1 \end{vmatrix} \qquad K(l,l) = 1$$

*Pour ce qui est de la construction de la solution « produit », analytique, on prendra :*

$$\forall n \geq 1 \quad \frac{c_n}{c_{n-1}} = \frac{K(n,+\infty)}{u_{n-1} \times K(n-1,+\infty)} = -\frac{A_n}{B_n} \times \frac{K(n,+\infty)}{K(n-1,+\infty)}$$

*En supposant par exemple que $c_0$=1, comme on l'a déjà fait pour le calcul de la constante $\nu^2$, on a :*

$$\begin{cases} y_{1,2}(\xi) = \sqrt{w(\xi)}\ Exp\left( \pm \frac{\nu(\lambda)}{2} \times \int_0^{\xi} \frac{dt}{w(t)\sqrt{t(1-t)}} \right) \\ \nu^2(\lambda) = 2q - \lambda - c_1 \times \frac{K(1,+\infty)}{K(0,+\infty)} = 2q - \lambda + \frac{A_1}{B_1} \times \frac{K(1,+\infty)}{K(0,+\infty)} \qquad \frac{y_{1,2}'(\xi)}{y_{1,2}(\xi)} = \frac{1}{2}\left( \frac{w'(\xi)}{w(\xi)} \pm \frac{\nu(\lambda)}{w(\xi)\sqrt{\xi(1-\xi)}} \right) \\ c_0 = 1 \qquad c_n = (-1)^n \times \frac{K(n,+\infty)}{K(0,+\infty)} \times \prod_{l=1}^{l=n} \frac{A_n}{B_n} \qquad w(\xi) = \sum_{n=0}^{n=+\infty} c_n \xi^n \end{cases}$$

*Les dérivées premières s'expriment sous la forme :* $\frac{y'_{1,2}(\xi)}{y_{1,2}(\xi)} = \frac{1}{2}\left( \frac{w'(\xi)}{w(\xi)} \pm \frac{\nu(\lambda)}{w(\xi)\sqrt{\xi(1-\xi)}} \right)$. *Les dérivées secondes s'écrivent directement :* $\frac{y_{1,2}''(\xi)}{y_{1,2}(\xi)} = \frac{\sqrt{\xi(1-\xi)} \times \left(\nu^2(\lambda) + \xi(1-\xi)(2w(\xi)\,w''(\xi) - w'(\xi))^2\right) \pm (2\xi-1)\nu(\lambda) \times w(\xi)}{4(w(\xi))^2(\xi(1-\xi))^{\frac{3}{2}}}$

*Sur ξ€[0,1] je me restreint délibérément aux valeurs de ξ pour lesquelles le polynôme w(ξ) restent positives.*

*Il y a des cas où la constante ν(λ) est purement imaginaire et dans ce cas les fonctions* $y_{1,2}(x)$ *prennent des valeurs purement imaginaire*

$$\nu^2(\lambda) = 2q - \lambda - c_1 \times \frac{K(1,+\infty)}{K(0,+\infty)} = \xi(\xi-1)\left(2\,w(\xi)\,w''(\xi) - (w'(\xi))^2 + 2\,p(\xi)\,w(\xi)\,w'(\xi) + 4\,q(\xi)\,(w(\xi))^2\right) < 0$$

$$\Rightarrow \nu^2(\lambda) = -\tau^2(\lambda) \Leftrightarrow \tau(\lambda) = \sqrt{\lambda + c_1 \times \frac{K(1,+\infty)}{K(0,+\infty)} - 2q} = \sqrt{\xi(1-\xi)\left(2\,w(\xi)\,w''(\xi) - (w'(\xi))^2 + 2\,p(\xi)\,w(\xi)\,w'(\xi) + 4\,q(\xi)\,(w(\xi))^2\right)}$$

*Dans ce cas les fonctions* $y_{1,2}(\xi)$ *deviennent :*

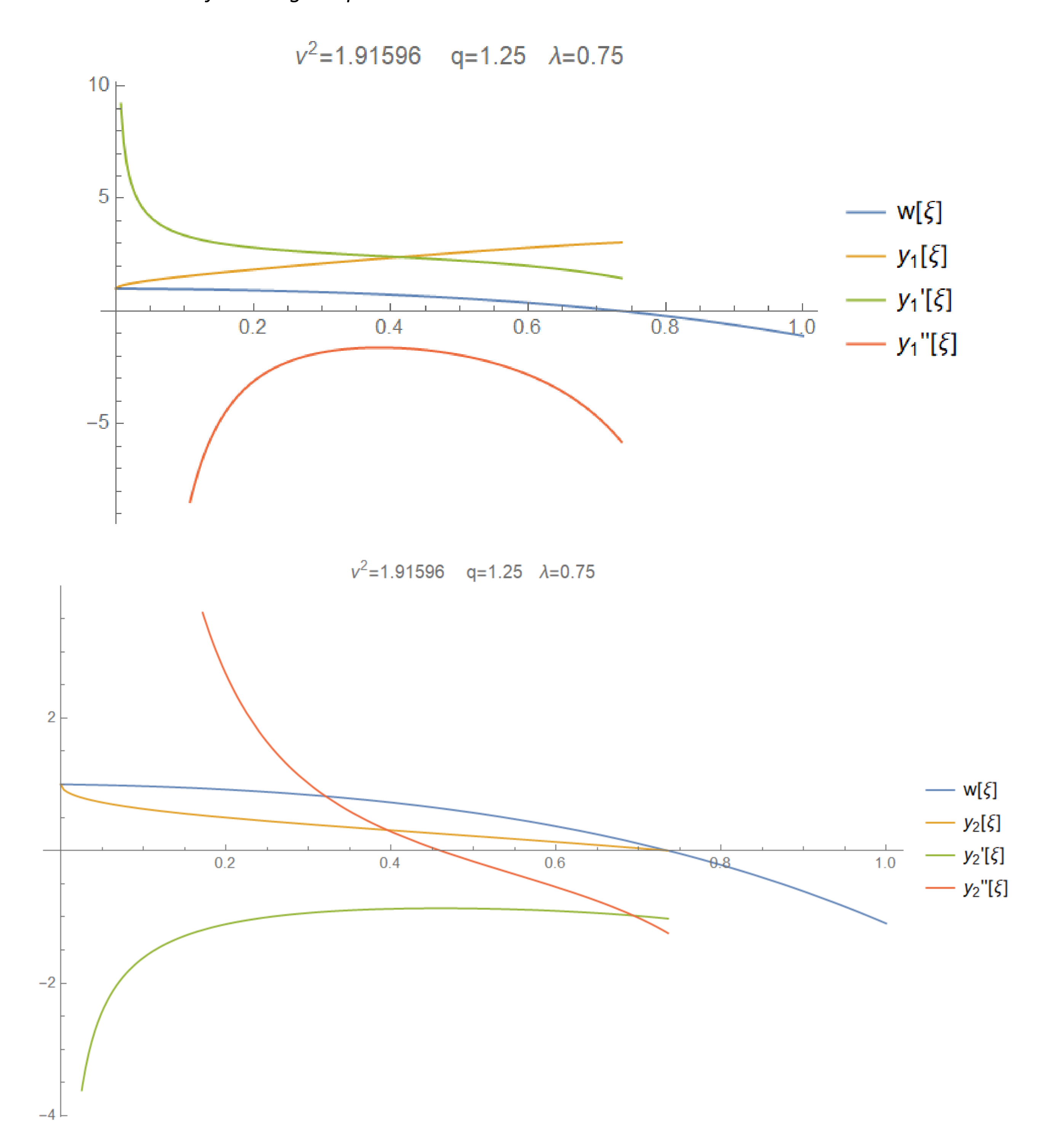
$$y_{1,2}(\xi) = \sqrt{w(\xi)}\ Exp\left( \pm i \frac{\tau(\lambda)}{2} \times \int_0^{\xi} \frac{dt}{w(t)\sqrt{t(1-t)}} \right) \quad \frac{y_{1,2}'(\xi)}{y_{1,2}(\xi)} = \frac{1}{2}\left( \frac{w'(\xi)}{w(\xi)} \pm i\,\tau(\lambda) \times \frac{1}{w(\xi)\sqrt{\xi(1-\xi)}} \right)$$

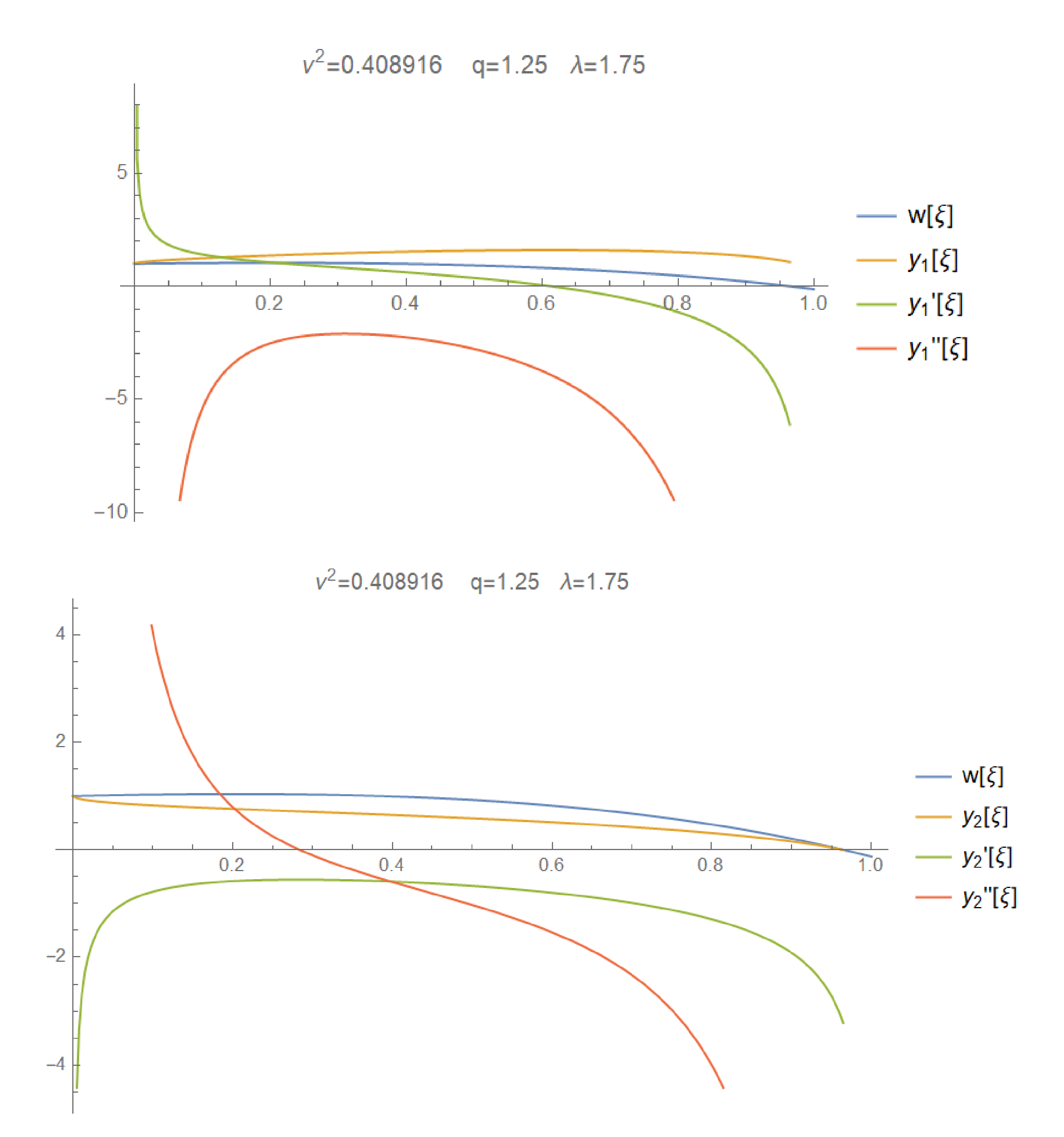
$$\frac{y_{1,2}''(\xi)}{y_{1,2}(\xi)} = \frac{\sqrt{\xi(1-\xi)} \times \left(-\tau^2(\lambda) + \xi(1-\xi)(2w(\xi)\,w''(\xi) - w'(\xi))^2\right) \pm (2\xi-1)\,i\,\tau(\lambda) \times w(\xi)}{4(w(\xi))^2(\xi(1-\xi))^{\frac{3}{2}}}$$

*On peut alors distinguer les parties réelle et imaginaire, sachant que :*

$$\mathrm{Re}(y_1(\xi)) = \mathrm{Re}(y_2(\xi)) \qquad et \qquad \mathrm{Im}(y_1(\xi)) = -\mathrm{Im}(y_2(\xi))$$

*Voici quelques exemples de solutions calculées par quadrature de Hermite-Darboux de l'équation de Mathieu sous forme algébrique :*





$v^2$=0.408916 q=1.25 λ=1.75
5
−5
−10
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
w[ξ]
$y_1$[ξ]
$y_1$'[ξ]
$y_1$''[ξ]
$v^2$=0.408916 q=1.25 λ=1.75
4
2
-2
-4
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
w[ξ]
$y_2$[ξ]
$y_2$'[ξ]
$y_2$''[ξ]

*Voici quelques cas où la constante $v^2$ est négative :*

